Є. П. Нелін

АЛГЕБРА

- Опорні таблиці
- Схеми розв'язування
- Тренувальні тести

8

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

УДК 512(075.3+076)
ББК 22.1я721
Н49

Рекомендовано для учнів 8 класу; відповідає програмі для загальноосвітніх навчальних закладів, затвердженій Міністерством освіти і науки України
(*лист № 1/11-2511 від 20.06.2003 р.*)

Рецензент
О. М. Роганін, учитель математики вищої категорії Пісочинського колегіуму Харківської райради Харківської області, учитель-методист.

Видано за ліцензією ТОВ Видавництво «Ранок»

Нелін Є. П.
Н49 Алгебра. 8 клас: Опорні таблиці, схеми розв'язування, тренувальні тести.— Х.: Видавництво «Ранок», 2009.— 112 с.
ISBN 978-966-672-345-4

Посібник містить поданий у таблицях теоретичний матеріал із курсу алгебри 8 класу, схеми розв'язування вправ з прикладами, тренувальні вправи та тренувальні тести.

У виданні наведено самостійні та контрольні роботи для перевірки засвоєння навчального матеріалу.

Посібник буде корисним під час роботи на уроках математики, а також для самостійної підготовки до контрольних робіт та тематичного контролю.

Призначено для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів та вчителів математики.

УДК 512(075.3+076)
ББК 22.1я721

ISBN 978-966-672-345-4

ШАНОВНІ ВОСЬМИКЛАСНИКИ!

Ви продовжуєте вивчати цікавий шкільний предмет — алгебру. Деякі елементи алгебри ви вже вивчили в 7 класі, а протягом восьмого класу вам доведеться познайомитися з новими алгебраїчними поняттями, їх означеннями, властивостями та способами розв'язування алгебраїчних завдань.

Пропонований посібник є продовженням аналогічного посібника для 7 класу і призначений допомогти вам успішно засвоїти алгебраїчний матеріал при навчанні за будь-яким підручником алгебри.

Усі розділи посібника повністю відповідають програмі курсу алгебри 8 класу і побудовані однаково.

Спочатку пропонуються *опорні таблиці,* у яких розглядається основний теоретичний матеріал розділу та орієнтири для виконання алгебраїчних завдань (тобто саме те, що ви повинні засвоїти і запам'ятати!) з прикладами, що ілюструють кожне поняття чи властивість.

Наступний пункт розділу — *це розв'язування вправ.* Тут для всіх основних типів завдань, що розглядаються в розділі, пропонується план дій або схема міркувань, які допоможуть скласти і реалізувати такий план. Після цього пропонуються *тренувальні вправи,* які містять мінімальну кількість типових вправ до матеріалу розділу (при необхідності значно більшу кількість тренувальних вправ до розділу ви можете знайти у своєму підручнику з алгебри).

Для того щоб ви та ваш учитель впевнилися в тому, що ви правильно і повно засвоїли матеріал розділу, у посібнику пропонуються *контрольні роботи.*

А щоб полегшити підготовку до контрольної роботи та тематичного контролю, до кожного розділу пропонується *тренувальний тест для підготовки до контрольної роботи та тематичного контролю,* у завданнях якого не тільки подані типові вправи до розділу, а й нагадуються плани їх розв'язування.

Планувати потрібно не тільки розв'язування алгебраїчних задач, а й своє майбутнє життя, тому ті з вас, хто збирається після закінчення школи вступати до вищих навчальних закладів, мають можливість познайомитися з методами розв'язування деяких задач вступних іспитів з математики та зовнішнього оцінювання з математики у пунктах посібника *для майбутніх абітурієнтів.*

Наприкінці посібника запропонований довідковий матеріал з курсу математики 5—6 класів та алгебри 7 класу поданий у таблицях.

Бажаю успіху!

Автор

РОЗДІЛ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Таблиця 1. **Ділення степенів і одночленів. Степінь з нульовим і від'ємним показником**

Означення або правила	Приклади
Поділити вираз A на вираз B означає знайти вираз X такий, що $A = X \cdot B$	$\frac{x^7}{x^3} = x^4$, оскільки $x^7 = x^4 \cdot x^3$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$	$\frac{x^{20}}{x^7} = x^{20-7} = x^{13}$
Щоб поділити одночлен на одночлен, треба: 1) поділити коефіцієнт діленого на коефіцієнт дільника; 2) до знайденої частки приписати множниками кожну змінну діленого з показником, що дорівнює різниці показників цієї змінної в діленому і дільнику	$\frac{32a^7b^9c^5}{8a^6b^7c} = \frac{32}{8} \cdot \frac{a^7}{a^6} \cdot \frac{b^9}{b^7} \cdot \frac{c^5}{c} =$ $= 4ab^2c^4$
Степінь з нульовим і від'ємним показником	
$a^0 = 1$, $a \neq 0$	$5^0 = 1$; $(-7)^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in N$, $a \neq 0$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$; $x^{-1} = \frac{1}{x}$; $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$; $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
Запис числа в стандартному вигляді	
Стандартним виглядом числа називається його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і n — ціле число.	Маса Землі $5{,}98 \cdot 10^{27}$ *г*; маса Місяця $7{,}35 \cdot 10^{25}$ *г*;

Запис числа в стандартному вигляді	
У цьому запису показник степеня n називається *порядком числа*. Як правило, стандартний запис числа використовують для подання дуже великих чи дуже малих чисел	маса атома водню $1{,}674\cdot 10^{-24}$ *г*

Таблиця 2. **Дробові раціональні вирази**

Означення або правила	Приклади
Раціональним виразом називається вираз, складений із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня	$(a+2c)^3;\ \left(\frac{a}{x}+1\right)\cdot\left(\frac{x^2}{b}+c\right)$ — раціональні вирази
Цілим виразом називається раціональний вираз, який не містить ділення на вираз із змінною **Дробом** називається частка від ділення двох виразів, записана за допомогою дробової риски	$2x^2+x$, $\frac{2}{3}(a-5)$ — цілі раціональні вирази $x+\frac{5}{a+2}$ — дробовий раціональний вираз
Допустимими значеннями змінних у виразі називають такі значення змінних, при яких вираз має числове значення (тобто при допустимих значеннях змінних можна виконати всі дії, записані у виразі)	1) Для виразу $(a^2+b^2)^3+1$ усі значення a і b є допустимими. 2) Для виразу $\frac{x+5}{x}$ допустимими є всі значення $x\neq 0$ (при $x=0$ $\frac{x+5}{x}=\frac{5}{0}$ — не число, бо на 0 ділити на можна)
Множину всіх допустимих значень змінних із даного виразу часто називають **областю допустимих значень виразу (ОДЗ)**	Для виразу x^{-2} ОДЗ: $x\neq 0$, бо при $x=0$ $x^{-2}=\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^2}=\frac{1}{0}$ — не число (на 0 ділити на можна)

Означення або правила	Приклади
Для змінних, що стоять у знаменнику дробу, допустимими є тільки ті значення, при яких цей знаменник не дорівнює нулю	1) Для виразу $\frac{b}{a}$ ОДЗ: $a \neq 0$. 2) Для виразу $\frac{\frac{1}{x}+2}{x-3}$ ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x-3 \neq 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 3 \end{cases}$
Щоб знайти допустимі значення змінних у раціональному дробі, можна: 1) прирівняти знаменники дробів до нуля; 2) знайти розв'язки одержаних рівнянь; 3) з усіх чисел виключити одержані розв'язки	Щоб знайти допустимі значення x у виразі $\frac{2x}{x^2-4x}$, з'ясовуємо, коли $x^2-4x=0$; $x(x-4)=0$. Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із співмножників дорівнює нулю: $x=0$ або $x-4=0$; $x=0$ або $x=4$. Допустимими значеннями x є всі числа, крім 0 і 4. *Відповідь*. ОДЗ: $x \neq 0$ і $x \neq 4$
Тотожними називаються вирази, відповідні числові значення яких рівні при всіх допустимих значеннях змінних	Вирази $\frac{x^5}{x}$ і x^4 тотожно рівні, бо для всіх $x \neq 0$ (ОДЗ виразу $\frac{x^5}{x}$) значення виразів $\frac{x^5}{x}$ і x^4 рівні

Таблиця 3. **Основна властивість дробу**

Властивість	Приклади
Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий вираз (що не дорівнює нулю на ОДЗ даного дробу), то одержимо дріб, тотожно рівний даному	$\frac{x(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{x}{(x-1)^2}$; $\frac{1}{x} = \frac{x^2+2}{x(x^2+2)}$

Скорочення дробів	
Скоротити дріб означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний дільник (зазначимо, що на ОДЗ даного дробу цей спільний дільник не дорівнює нулю)	$\frac{x^5}{x^2(x+3)}=\frac{x^3}{x+3}$
Для того щоб скоротити дріб, треба: 1) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники; 2) вибрати спільний множник для чисельника і знаменника дробу; 3) розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник	Скоротити дріб $\frac{a^3-9a}{a^4-3a^3}$. 1) Розкладаємо чисельник і знаменник на множники (виносимо за дужки спільні множники і в чисельнику розкладаємо на множники різницю квадратів): $\frac{a(a^2-9)}{a^3(a-3)}=\frac{a(a-3)(a+3)}{a^3(a-3)}$; 2) вибираємо спільний множник для чисельника і знаменника — це $a(a-3)$; 3) ділимо чисельник і знаменник дробу на $a(a-3)$ і одержуємо дріб $\frac{a+3}{a^2}$

Таблиця 4. **Дії з раціональними дробами**

Правило	Приклад
1. Додавання і віднімання дробів	
Якщо знаменники рівні, то чисельники додаються (віднімаються), а знаменник зберігається (якщо після цього одержаний дріб можна скоротити, то його скорочують)	$\frac{x^2-x-3}{x-1}+\frac{x+2}{x-1}=$ $=\frac{x^2-x-3+x+2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=$ $=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$

Правило	Приклад
Якщо знаменники різні, то спочатку дроби зводять до спільного знаменника, а потім додають (віднімають) як дроби з рівними знаменниками	$\frac{3}{a+2}-\frac{5}{a-2}=\frac{3(a-2)}{(a+2)(a-2)}-\frac{5(a+2)}{(a+2)(a-2)}=$ $=\frac{3a-6-(5a+10)}{(a+2)(a-2)}=\frac{3a-6-5a-10}{(a+2)(a-2)}=\frac{-2a-16}{a^2-4}$
2. Множення дробів	
При множенні дробів у чисельнику записують добуток чисельників, а в знаменнику — добуток знаменників (якщо після цього одержаний дріб можна скоротити , то його скорочують)	$\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{(x^2-1)\cdot x}{x^2\cdot(x-1)}=$ $=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x}$
При множенні дробу на цілий вираз у чисельнику записують добуток чисельника на цей вираз, а знаменник зберігається (можна також цілий вираз подати як дріб із знаменником 1)	$\frac{a}{a+2}\cdot(a^2-4)=\frac{a}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{1}=\frac{a(a^2-4)}{a+2}=$ $=\frac{a(a-2)(a+2)}{a+2}=a(a-2)=a^2-2a$
3. Ділення дробів	
При діленні дробів можна перший дріб помножити на дріб, обернений до другого	$\frac{a^2+3a}{a+1}:\frac{a+3}{a+1}=\frac{a^2+3a}{a+1}\cdot\frac{a+1}{a+3}=$ $=\frac{a(a+3)(a+1)}{(a+1)(a+3)}=a$
При піднесенні дробу до степеня підносять до цього степеня окремо чисельник і знаменник і записують дріб, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник — степенем знаменника	$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^7=\frac{(a^2)^7}{(b^3)^7}=\frac{a^{14}}{b^{21}}$

Правило	Приклад
Перед множенням або діленням алгебраїчних дробів часто зручно (якщо це можливо) розкласти чисельники і знаменники дробів на множники	

Таблиця 5. **Раціональні рівняння**

Означення	Приклади
Рівняння називають **раціональним**, якщо його ліва і права частини — раціональні вирази	$\frac{x-5}{x+3}=0$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=3$ $x^3-2x^2=0$ — раціональні рівняння

Схема розв'язування дробових раціональних рівнянь	
Схема	**Приклад**
Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна: 1) перенести всі члени рівняння в ліву частину; 2) виконати всі вказані дії й одержати рівняння, у якого ліва частина — дріб (чи цілий вираз), а права — нуль; 3) використати властивість: *дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю (а знаменник не дорівнює нулю)*, і прирівняти чисельник одержаного дробу до нуля;	Розв'язати рівняння $\frac{2}{x}+\frac{2x}{x+1}=\frac{x^2+2}{x}$. *Розв'язання* Перенесемо всі члени рівняння в ліву частину і згрупуємо дроби з однаковими знаменниками: $\frac{2}{x}-\frac{x^2+2}{x}+\frac{2x}{x+1}=0;$ $\frac{2-(x^2+2)}{x}+\frac{2x}{x+1}=0;$ $-x+\frac{2x}{x+1}=0;\ \frac{-x^2-x+2x}{x+1}=0;$ $\frac{-x^2+x}{x+1}=0;\ -x^2+x=0;\ x(-x+1)=0,$ якщо $x=0$ або $-x+1=0$, тобто $x=0$ або $x=1$.

4) розв'язати одержане рівняння; 5) перевірити, чи при всіх знайдених розв'язках у знаменниках заданого рівняння будуть числа, які не дорівнюють нулю (якщо одержимо в знаменнику нуль, то знайдене число не є коренем заданого рівняння)	При $x=0$ в знаменнику першого дробу в заданому рівнянні одержуємо нуль. Отже, $x=0$ не є коренем заданого рівняння. При $x=1$ усі знаменники дробів у заданому рівнянні не дорівнюють нулю ($x=1\neq 0$; $x+1=2\neq 0$). Отже, $x=1$ — корінь заданого рівняння. *Відповідь*: 1

Рівносильні рівняння	
Означення	**Приклад**
(7 клас) *Рівносильні рівняння* — це рівняння, які мають ті ж самі корені. Якщо рівняння не мають коренів, то їх також вважають рівносильними	$3x=24$ і $x-8=0$ — рівносильні рівняння (обидва мають тільки один корінь $x=8$)
Два рівняння називаються *рівносильними на деякій множині*, якщо на цій множині вони мають ті ж самі корені. Якщо рівняння не мають коренів на заданій множині, то їх також вважають рівносильними на цій множині	Рівняння $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ (1) має єдиний корінь $x=1$. Рівняння $x^2-1=0$ (2) має корені $x=1$ і $x=-1$ (й інших коренів не має). Якщо розглядати ці рівняння *на множині всіх чисел, то вони не рівносильні*. Але *на множині додатних чисел ці рівняння рівносильні* (обидва мають тільки один додатний корінь $x=1$)
Областю допустимих значень (ОДЗ) *рівняння* (або областю визначення рівняння) називається спільна область визначення для всіх функцій, які входять до запису рівняння	Для рівняння $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ (1) ОДЗ: $x+1\neq 0$, тобто $x\neq -1$

Найчастіше всі рівносильні перетворення рівнянь (та їх систем) виконуються на ОДЗ цього рівняння (системи)	При $x \neq -1$ рівняння (1) рівносильне рівнянню $x^2 - 1 = 0$ (2), яке має корені $x = 1$ і $x = -1$. Враховуючи ОДЗ $(x \neq -1)$, одержуємо, що коренем рівняння (1) є тільки $x = 1$

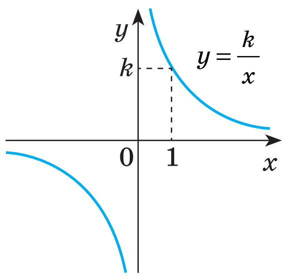
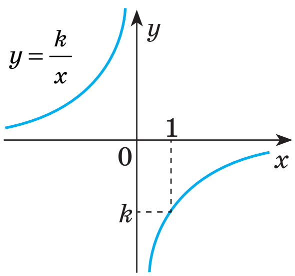
Найпростіші властивості рівносильних рівнянь
Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне і те ж саме число, яке не дорівнює нулю (або на один і той же самий вираз, який визначений і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого), то одержимо рівняння, рівносильне даному (на ОДЗ заданого)
Якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу будь-який член і змінити його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному (на будь-якій множині)

Інша схема розв'язування дробових раціональних рівнянь	
Схема	**Приклад**
Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна: 1) записати ОДЗ заданого рівняння; 2) знайти спільний знаменник усіх дробів, що входять до запису рівняння (доцільно вибирати той спільний знаменник, який можна подати як многочлен найменшого степеня, тоді він не буде дорівнювати нулю на ОДЗ заданого рівняння); 3) помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник (одержимо рівняння, рівносильне заданому на його ОДЗ);	Розв'язати рівняння $\frac{2}{x} + \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2+2}{x}$. *Розв'язання* ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x+1 \neq 0. \end{cases}$ Помножимо обидві частини заданого рівняння на спільний знаменник заданих дробів: $x(x+1)$, який не дорівнює нулю на ОДЗ: $2(x+1) + 2x^2 = (x^2+2)(x+1)$, $2x + 2 + 2x^2 = x^3 + x^2 + 2x + 2$, $2x + 2 + 2x^2 - x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$, $-x^3 + x^2 = 0$, $-x^2(x-1) = 0$. Тоді $x^2 = 0$ або $x - 1 = 0$, тобто $x = 0$ або $x = 1$.

4) розв'язати одержане ціле рівняння; 5) перевірити, чи всі знайдені розв'язки входять до ОДЗ, тобто чи задовольняють вони всі умови ОДЗ (якщо знайдене число не задовольняє якесь з обмежень ОДЗ, то воно не є коренем заданого рівняння)	Врахуємо ОДЗ: $x=0$ — не задовольняє першу умову ОДЗ, отже, $x=0$ не є коренем заданого рівняння. При $x=1$ обидві умови ОДЗ виконуються, отже, $x=1$ — корінь заданого рівняння. *Відповідь*: 1

Таблиця 6. **Функція $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$**

Властивості	
1. Область визначення	$x\neq 0$
2. Область значень	$y\neq 0$
3. Точки перетину з осями координат	Оскільки $x\neq 0$ і $y\neq 0$, то точок перетину з осями координат немає

Графік	
Графік функції $y=\frac{k}{x}$ — крива, що складається з двох віток (симетрична відносно початку координат), яка називається *гіперболою* (при $k>0$ вітки гіперболи розміщені в I і III чвертях, при $k<0$ — у II і IV чвертях)	
$k>0$	$k<0$
	

Розв'язування вправ

1. Знайдіть значення виразу:

а) $\dfrac{6a-4b}{a+b}$, б) $\dfrac{a^2+b^2-2ab}{a^2-b^2}$ при $a=1,3;\ b=0,7$.

План	Розв'язання
Обчислити значення даних виразів при заданих значеннях змінних можна двома способами. 1. Безпосередньо підставити значення змінних в заданий вираз (пункт «а»). 2. Спочатку спростити заданий вираз, а потім підставити значення змінних у більш простий вираз (пункт «б»).	а) При $a=1,3;\ b=0,7$ одержуємо: $\dfrac{6a-4b}{a+b}=\dfrac{6\cdot 1,3-4\cdot 0,7}{1,3+0,7}=\dfrac{7,8-2,8}{2}=$ $=\dfrac{5}{2}=2,5$. б) $\dfrac{a^2+b^2-2ab}{a^2-b^2}=\dfrac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{a-b}{a+b}$. При $a=1,3;\ b=0,7$ одержуємо: $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{1,3-0,7}{1,3+0,7}=\dfrac{0,6}{2}=0,3$. *Відповідь*: а) 2,5; б) 0,3

2. Доведіть тотожність $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}\right):\dfrac{2xy}{x^2-y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

План	Розв'язання
Щоб довести тотожність, досить довести, що ліва частина тотожності дорівнює правій (або права частина дорівнює лівій) або різниця між лівою і правою частинами тотожності дорівнює нулю. Перетворимо ліву частину тотожності, послідовно виконуючи: 1) дії у дужках, 2) ділення одержаного виразу на другий вираз	1) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=$ $=\dfrac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=$ $=\dfrac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}$. 2) $\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}:\dfrac{2xy}{x^2-y^2}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)\cdot 2xy}=$ $=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$. Отже, ліва частина дорівнює правій і задана рівність є тотожністю

3. Виконати дії: $\dfrac{ab^2-a^3}{a^2+b^2}\cdot\left(\dfrac{a}{(a-b)^2}-\dfrac{b}{a^2-b^2}\right)+\dfrac{b}{a-b}$.

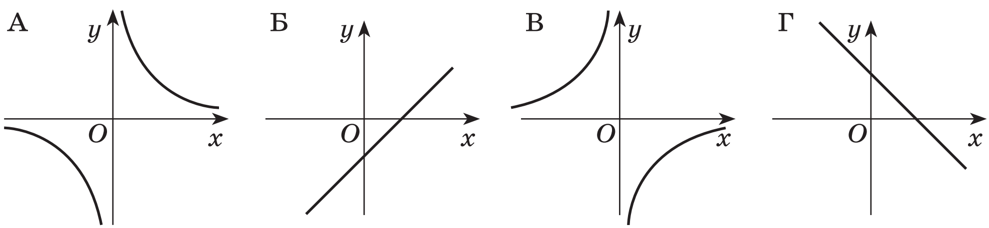
План	Розв'язання
Будемо розв'язувати цей приклад, послідовно виконуючи: 1) дії в дужках; 2) множення першого дробу на одержаний вираз; 3) додавання одержаного виразу й останнього дробу	1) $\dfrac{a}{(a-b)^2}-\dfrac{b}{a^2-b^2}=\dfrac{a}{(a-b)^2}-\dfrac{b}{(a-b)(a+b)}=$ $=\dfrac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)^2(a+b)}=\dfrac{a^2+ab-ab+b^2}{(a-b)^2(a+b)}=\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)^2(a+b)}$; 2) $\dfrac{ab^2-a^3}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)^2(a+b)}=\dfrac{a(b^2-a^2)\cdot\cancel{(a^2+b^2)}}{\cancel{(a^2+b^2)}\cdot(a-b)^2(a+b)}=$ $=\dfrac{a(b-a)\cdot\cancel{(b+a)}}{(a-b)^2\cancel{(a+b)}}=\dfrac{-a\cdot\cancel{(a-b)}}{(a-b)^{\cancel{2}}}=\dfrac{-a}{a-b}$; 3) $\dfrac{-a}{a-b}+\dfrac{b}{a-b}=\dfrac{-a+b}{a-b}=\dfrac{-(a-b)}{a-b}=-1$. *Відповідь*: -1

4. Дві бригади трактористів, працюючи разом, зорали поле за 8 год. За скільки годин може зорати це поле кожна бригада, працюючи самостійно, якщо другій бригаді на це потрібно в два рази більше часу, ніж першій?

План	Розв'язання	
	I спосіб	II спосіб
У задачах на сумісну роботу часто зручно: 1) увесь обсяг роботи, що виконується, позначити через 1;	Нехай обсяг усієї роботи дорівнює 1. Позначимо час виконання всієї роботи першою бригадою через x год, тоді друга виконає всю роботу за $2x$ год.	Нехай обсяг усієї роботи дорівнює 1. Позначимо продуктивність роботи першої бригади через v, тоді продуктивність другої — $\dfrac{v}{2}$ (оскільки вона працює вдвічі повільніше).

План	Розв'язання	
	I спосіб	II спосіб
2) визначити продуктивність* кожного працюючого та їх сумісну продуктивність; 3) скласти рівняння за умовою задачі й розв'язати його	Продуктивність роботи першої бригади буде $\frac{1}{x}$, а другої — $\frac{1}{2x}$. Сумісна продуктивність обох бригад (при їх спільній роботі) дорівнює $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{3}{2x}$. Але з умови одержуємо, що сумісна продуктивність дорівнює $\frac{1}{8}$. Одержуємо рівняння $\frac{3}{2x}=\frac{1}{8}$. Звідси $x=12$ (год) — час роботи першої бригади, а час роботи другої — $2x=2\cdot 12=24$ (год). *Відповідь*: 12 год, 24 год	Сумісна продуктивність обох бригад (при їх спільній роботі) дорівнює $\nu+\frac{\nu}{2}=\frac{3}{2}\nu$. За умовою одержуємо рівняння $\frac{3}{2}\nu\cdot 8=1$. Звідси $\nu=\frac{1}{12}$. Тоді час роботи першої бригади дорівнює $\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\frac{1}{12}}=12$ (год), а час роботи другої — $12\cdot 2=24$ (год). *Відповідь*: 12 год, 24 год

5. На одному з рисунків зображено графік функції $y=-\frac{2}{x}$. Укажіть цей рисунок.



* *Продуктивність* — це обсяг роботи, яка виконується за одиницю часу, тобто це швидкість виконання роботи

План	Розв’язання
Згадаємо, яка лінія є графіком заданої функції (гіпербола). Потім, спираючись на властивості заданої функції, виберемо один із двох наведених графіків (A чи B), де зображено гіперболи	Задана функція $y=-\frac{2}{x}$ — це функція виду $y=\frac{k}{x}$, графіком якої є гіпербола. Оскільки $k=-2<0$, то ця гіпербола розміщена в другій і четвертій координатних чвертях. Отже, графік заданої функції зображено на рисунку B

Тренувальні вправи

1. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

а) $2x-5$; б) $\frac{5}{a}$; в) $\frac{x+2}{4}$; г) $\frac{5}{a-4}$; д) $\frac{x+7}{x-1}$; е) $\frac{1}{x}+\frac{5}{x+1}$?

2. При яких значеннях змінної значення даного дробу дорівнює нулю?

а) $\frac{x-1}{2}$; б) $\frac{5-a}{a}$; в) $\frac{x^2-4}{x+2}$; г) $\frac{a}{a-4}$; д) $\frac{x+1}{x^2-1}$; е) $\frac{|x|-2}{x-3}$.

3. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{a^2-9}{a-3}$, якщо $a=2,79$;

б) $\frac{a^2}{b}\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{a}-a\right)$, якщо $a=-1$, $b=-4$;

в) $\frac{a^2}{a-1}+\frac{1}{1-a}$, якщо $a=1,7$.

4. Спростіть вираз:

а) $\left(4a-\frac{2a}{a+1}\right)\cdot\frac{a+1}{2a^2}$; б) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{2ab}{a^2-b^2}$;

в) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$; г) $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)\cdot\frac{1}{a-c}$.

5. Виконайте дії:

а) $\left(\dfrac{a}{(a-1)^2}-\dfrac{a}{a^2-1}\right)\cdot\dfrac{a^2-2a+1}{2a}+\dfrac{a}{a+1}$;

б) $\left(\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+3}\right):\dfrac{2x}{9-x^2}$;

в) $\left(\dfrac{y-1}{2y+2}-\dfrac{y+1}{2y-2}\right):\dfrac{y}{4-4y^2}$;

г) $\dfrac{b^2+8b+16}{b}\cdot\left(\dfrac{b}{(b+4)^2}+\dfrac{b}{16-b^2}\right)+\dfrac{8}{b-4}$.

6. Розв’яжіть рівняння:

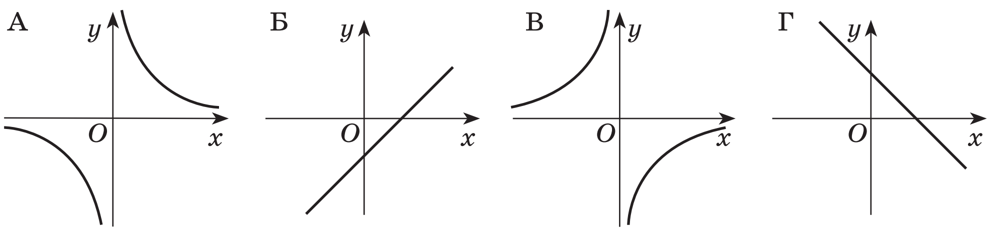
а) $\dfrac{2x-x^2}{x^2-4}=0$; б) $\dfrac{x^2-x}{1-x^2}=0$; в) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}=0$; г) $\dfrac{5x-x^2}{x^2+x-30}=0$.

7. Розв’яжіть рівняння:

а) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{5x}{x-2}=\dfrac{x^2+3}{x}$; б) $\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{7}{x}=\dfrac{x^2+7}{x}$.

8. Побудуйте графік функції: а) $y=\dfrac{2}{x}$, б) $y=-\dfrac{4}{x}$.

9. На одному з рисунків зображено графік функції $y=\dfrac{3}{x}$. Укажіть цей рисунок.



10. Не виконуючи побудови графіка функції $y=\dfrac{12}{x}$, вкажіть, через які з даних точок проходить графік заданої функції: $A(-2;\ -6)$; $B(1;\ -12)$; $C(3;\ 4)$; $D(2;\ -6)$.

11. Катер, швидкість якого в стоячій воді дорівнює 8 км/год, пройшов 15 км за течією річки і зразу повернувся назад, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії річки.

12. Два крани, працюючи разом, можуть розвантажити баржу за 12 год. За який час може розвантажити цю баржу кожний кран, працюючи самостійно, якщо другому крану на це потрібно в три рази менше часу, ніж першому?
13. З пункту A в пункт B, відстань між якими становить 80 км, одночасно виїхали два автомобіля. Один із них зробив зупинку на 15 хв, але до пункту B прибув на 5 хв раніше від другого. Відомо, що його швидкість в 1,5 разу більша за швидкість другого. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

Тренувальні тести для підготовки до контрольної роботи та тематичного оцінювання

Записуючи відповіді на завдання тесту, обведіть літери, що відповідають твердженням, які ви вважаєте правильними, та закресліть літери, що відповідають твердженням, які ви вважаєте неправильними. Наприклад, якщо ви вважаєте правильними твердження А і В, а неправильними — твердження Б і Г, запишіть А ~~Б~~ В ~~Г~~. Якщо хоча б одна літера з чотирьох буде не позначеною, завдання вважається *не виконаним*.

Частина 1

1 рівень

1. Користуючись формулою $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $(a\neq 0)$, виберіть правильну рівність.

   А. $\frac{5^8}{5^4}=5^2$. **Б.** $\frac{5^8}{5^4}=5^4$. **В.** $3^9:3^3=3^3$. **Г.** $3^9:3^3=3^7$.

2. Задано дріб $\frac{3(a+b)}{a(a+b)}$. Виберіть правильне твердження.

   А. Чисельник і знаменник заданого дробу не мають спільного множника.

Б. Чисельник і знаменник заданого дробу мають спільний множник $a(a+b)$.

В. Після скорочення заданого дробу можна отримати дріб $\frac{3}{a}$.

Г. Після скорочення заданого дробу можна отримати дріб $\frac{3}{a+b}$.

3. Задано дріб $\frac{2a}{a+3}$. Враховуючи, що знаменник дробу не може дорівнювати нулю, виберіть правильне твердження.

А. При $a=3$ числове значення заданого дробу не існує.

Б. Числове значення заданого дробу існує при всіх значеннях a.

В. При $a=-3$ існує числове значення заданого дробу.

Г. Числове значення заданого дробу існує тільки при $a \neq -3$.

2 рівень

4. Одночлен $15u^{14} \cdot v^9$ ділиться на одночлен $5u^5 \cdot v^7$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. У результаті ділення одержимо одночлен.

Б. Щоб знайти коефіцієнт частки, треба поділити коефіцієнт діленого на коефіцієнт дільника.

В. До одночлена-частки змінна u входить у степені, який дорівнює $14+5$.

Г. Частка від ділення заданих одночленів дорівнює $5u^9 \cdot v^2$.

5. Обчислюють значення дробу $\frac{3x^2}{x-4}$ при деяких значеннях x. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Для обчислення значення заданого дробу при $x=5$ треба обчислити значення виразу $\frac{3 \cdot 5^2}{5-4}$.

Б. При $x=5$ значення заданого дробу дорівнює 25.

В. При $x=4$ значення заданого дробу дорівнює 48.

Г. Значення заданого дробу можна обчислити при будь-яких значеннях x.

6. Два дроби $\dfrac{2a}{(a-b)a}$ і $\dfrac{3}{a^2b}$ зводять до спільного знаменника. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Спільним знаменником заданих дробів є $(a-b)ab$.

Б. Спільним знаменником заданих дробів є $(a-b)a^2b$.

В. Після зведення заданих дробів до спільного знаменника одержуємо дроби $\dfrac{2a^2b}{(a-b)a^2b}$ і $\dfrac{3(a-b)}{(a-b)a^2b}$.

Г. Після зведення заданих дробів до спільного знаменника одержуємо дроби $\dfrac{2ab}{(a-b)ab}$ і $\dfrac{3(a-b)}{(a-b)ab}$.

3 рівень

7. Розглядають частку двох виразів: $6(a-1)^5\cdot x^7\cdot y^5:\left(2(a-1)^3\cdot x^9\cdot y^8\right)$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Задану частку можна записати так: $3(a-1)^2\cdot x^2\cdot y^3$.

Б. Задану частку можна записати так: $3(a-1)^2\cdot x^{-2}\cdot y^{-3}$.

В. Задана частка дорівнює дробу $\dfrac{3(a-1)^2x^2}{y^3}$.

Г. Задана частка дорівнює дробу $\dfrac{3(a-1)^2}{x^2y^3}$.

8. Треба скоротити дріб $\dfrac{2ab-4a}{b^2-4}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Чисельник заданого дробу можна розкласти на множники так: $2a(b+2)$.

Б. Знаменник заданого дробу можна розкласти на множники так: $(b+2)(b-2)$.

В. Якщо скоротити заданий дріб, то одержимо $\dfrac{2a}{b+2}$.

Г. Значення заданого дробу можна обчислити при будь-яких значеннях a і b.

9. Спрощують вираз: $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}+\dfrac{a}{a+b}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Спільним знаменником усіх заданих дробів є a^2-b^2.

Б. Заданий вираз дорівнює $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

В. При будь-яких значеннях a і b значення заданого виразу дорівнює 1.

Г. Значення заданого виразу дорівнює 1 тільки при $a\neq b$ і $a\neq -b$.

4 рівень

10. Задано вираз: $\dfrac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}$. Відомо, що $\dfrac{y}{x}=3$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Якщо чисельник і знаменник заданого виразу поділити на x^2, то можна одержати дріб $\dfrac{3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}+1}{1+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$.

Б. Значення заданого виразу можна обчислити за формулою

$$\frac{3\cdot 3^2-2\cdot 3+1}{1+3+3^2}.$$

В. З умови випливає, що $y=3x$.

Г. Значення заданого виразу дорівнює $\dfrac{25}{13}$.

11. Скорочують дріб $\dfrac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Якщо до виразу в чисельнику дробу додати a^2x^2 і відняти a^2x^2, то чисельник можна подати як різницю квадратів двох виразів.

Б. Чисельник заданого дробу можна розкласти на множники так: $\left(x^2+a^2+ax\right)\left(x^2+a^2+ax\right)$.

В. Знаменник заданого дробу можна розкласти на множники так: $(x+a)\left(x^2+ax+a^2\right)$.

Г. Якщо скоротити заданий дріб, то одержимо дріб $\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$.

12. Задано вираз $\frac{6}{x^2-4}+\frac{x}{x+2}+\frac{3x}{4-x^2}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Значення заданого виразу існує при всіх значеннях x.

Б. Заданий вираз дорівнює виразу $\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$.

В. Заданий вираз дорівнює $\frac{x-3}{x+2}$ при всіх x з області визначення заданого виразу.

Г. При $x=2$ значення заданого виразу дорівнює $-\frac{1}{4}$.

Частина 2

1 рівень

1. Користуючись тим, що $\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$, де $B\neq 0$, виберіть правильне твердження щодо виразу $\left(\frac{-2m^4}{3x^2}\right)^3$.

А. Щоб піднести заданий дріб до третього степеня, треба піднести до цього степеня тільки чисельник, а знаменник залишити без змін.

Б. Щоб піднести заданий дріб до третього степеня, треба піднести до цього степеня тільки знаменник, а чисельник залишити без змін.

В. Заданий вираз дорівнює $\frac{-8m^{12}}{27x^6}$.

Г. Заданий вираз дорівнює $\frac{8m^{12}}{27x^6}$.

2. Розглядають добуток двох дробів: $\frac{2a^2}{3xy} \cdot \frac{5a^3}{7x^2y}$. Виберіть правильне твердження.

   А. Якщо перемножити чисельники заданих дробів, то одержимо $10a^6$.

   Б. Якщо перемножити знаменники заданих дробів, то одержимо $3x^3y^2$.

   В. Добуток заданих дробів дорівнює $\frac{10a^6}{3x^3y^2}$.

   Г. Добуток заданих дробів дорівнює $\frac{10a^5}{21x^3y^2}$.

3. Розглядають частку двох дробів: $\frac{5a^3}{b^2c} : \frac{2bc^4}{a}$. Виберіть правильне твердження.

   А. Дріб, обернений до другого із заданих дробів, дорівнює $\frac{a}{bc^4}$.

   Б. Частка заданих дробів дорівнює добутку $\frac{5a^3}{b^2c} \cdot \frac{a}{bc^4}$.

   В. Частка заданих дробів дорівнює $\frac{5a^4}{2b^3c^5}$.

   Г. Частка заданих дробів дорівнює $\frac{5a^4}{b^3c^5}$.

2 рівень

4. Задано вираз $\left(\frac{-2x^3}{a^2b}\right)^4$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

   А. Заданий вираз можна записати так: $\frac{\left(-2x^3\right)^4}{a^2b}$.

   Б. Заданий вираз можна записати так: $\frac{-2x^3}{\left(a^2b\right)^4}$.

В. Заданий вираз можна записати так: $\dfrac{\left(-2x^3\right)^4}{\left(a^2b\right)^4}$.

Г. Заданий вираз дорівнює $\dfrac{16x^{12}}{a^8b^4}$.

5. Розглядають частку двох дробів: $\dfrac{a+b}{(a-b)^2}:\dfrac{(a+b)^4}{a(a-b)^2}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Щоб поділити перший дріб на другий, можна помножити перший дріб на дріб $\dfrac{a(a-b)^2}{(a+b)^4}$.

Б. Задану частку можна записати так: $\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^4}$.

В. Задана частка дорівнює $\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

Г. Задана частка дорівнює $\dfrac{a}{(a+b)^3}$.

6. Задано рівняння $\dfrac{x-1}{x+4}=0$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Ліва частина заданого рівняння існує, якщо $x+4\neq 0$.

Б. Чисельник заданого дробу дорівнює нулю при $x=1$.

В. При $x=1$ знаменник заданого дробу дорівнює нулю.

Г. Задане рівняння має корінь $x=1$.

3 рівень

7. Розглядають вираз: $\dfrac{4m+4n}{n}:\dfrac{m^2-n^2}{n^2}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Ділене можна перетворити так: $\dfrac{2(m+n)}{n}$.

Б. Дільник можна перетворити так: $\dfrac{(m+n)(m+n)}{n^2}$.

В. Задану частку можна записати так: $\dfrac{2n}{m+n}$.

Г. Задану частку можна записати так: $\dfrac{4n}{m-n}$.

8. Розглядають вираз $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\left(\dfrac{a+b}{2a}\right)^{-1}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Для дробів, що стоять у перших дужках, як спільний знаменник можна взяти $2(a+b)(a-b)$.

Б. Вираз у перших дужках дорівнює $\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}$.

В. Другий множник у заданому виразі можна записати так: $\dfrac{a}{a+b}$.

Г. Заданий вираз дорівнює $\dfrac{a}{a-b}$.

9. Задано рівняння $\dfrac{x(x-1)}{x^2-3x+2}=0$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Чисельник дробу в лівій частині рівняння дорівнює нулю при $x=0$ та при $x=1$.

Б. При $x=0$ знаменник дробу в лівій частині рівняння не дорівнює нулю.

В. При $x=1$ знаменник дробу в лівій частині рівняння не дорівнює нулю.

Г. Задане рівняння має два корені.

4 рівень

10. Відомо, що катер проплив 15 км за течією річки і 4 км по озеру, витративши на весь шлях 1 год. Швидкість течії річки становить 4 км/год.

Швидкість катера при русі по озеру позначили через x км/год. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. За умовою можна скласти рівняння $\frac{15}{x+4}+\frac{4}{x}=1$.

Б. Рівняння, складене за умовою, рівносильне рівнянню

$$\frac{(x+1)(x-16)}{(x+4)x}=0.$$

В. Обидва корені рівняння, складеного за умовою, задовольняють задану умову.

Г. Швидкість катера при русі по озеру становить більше 16 км/год.

11. Задано вираз $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Дріб, який стоїть перед дужками, дорівнює дробу $\frac{b+c+a}{a-b-c}$.

Б. Якщо вираз у дужках звести до спільного знаменника, то чисельник одержаного дробу можна буде подати у вигляді різниці квадратів двох виразів.

В. Вираз у дужках дорівнює дробу $\frac{(a+b+c)(a-b-c)}{2bc}$.

Г. Заданий вираз дорівнює $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$.

12. Задано рівняння $\frac{x-2a}{x-1}+\frac{a^2}{x^2-x}=0$ (a — деяке число). Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Областю визначення заданого рівняння є всі значення x, які задовольняють умови: $x\neq 0$ і $x\neq 1$.

Б. Задане рівняння рівносильне рівнянню $\frac{(x+a)^2}{x(x-1)}=0$.

В. При $a=0$ задане рівняння має корені.

Г. При $a\neq 0$ і $a\neq 1$ задане рівняння має єдиний корінь $x=a$.

Контрольна робота

В-I	7 балів	В-II
1. Знайдіть значення виразу *(2 бали)*:		
а) 4^{-2}; б) $(-5)^{-3}$		а) 3^{-3}; б) $(-2)^{-2}$
2. Спростіть вираз *(2 бали)*:		
$\frac{1}{a-2}-\frac{2}{a^2-2a}$		$\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x^2-3x}$
3. Побудуйте графік функції *(1 бал)*:		
$y=\frac{3}{x}$		$y=\frac{5}{x}$
4. Розв'яжіть рівняння *(2 бали)*:		
$\frac{x^2-25}{x+5}=0$.		$\frac{x^2-36}{x+6}=0$.

В-III	9 балів	В-IV
1. Знайдіть значення виразу *(1 бал)*:		
$\left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$		$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$
2. Спростіть вираз *(2 бали)*:		
$\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2+1}{1-x^2}\right)\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$		$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}\right)\cdot\frac{a-b}{(a+b)^2}$
3. Побудуйте графік функції *(1 бал)*:		
$y=-\frac{2}{x}$		$y=-\frac{3}{x}$
4. Розв'яжіть рівняння *(2 бали)*:		
$\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=0$		$\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=0$

5. Розв'яжіть задачу *(3 бали)*:	
Майстер і учень, працюючи разом, виконали певну роботу за 3 год. За скільки годин може виконати цю роботу кожний із них, працюючи самостійно, якщо учневі на це потрібно в 3 рази більше часу, ніж майстрові?	Басейн заповнюється двома трубами за 8 год. За скільки годин може заповнити цей басейн кожна труба, працюючи окремо (тобто коли відкривають тільки одну трубу), якщо першій трубі на це потрібно в 4 рази менше часу, ніж другій?

В-V	12 балів	В-VI

1. Розв'яжіть рівняння *(2 бали)*:	
$\frac{x^2-2x}{x^2-5x+2}=0$	$\frac{x^2+3x}{x^2+2x-3}=0$
2. Побудуйте графік функції *(1 бал)*:	
$y=-\frac{1}{2x}$	$y=-\frac{1}{3x}$
3. Спростіть вираз *(3 бали)*:	
$\frac{16a}{4a^2-b^2}-\frac{2a+b}{ab-2a^2}-\frac{2a-b}{2a^2+ab}$	$\frac{x}{2x-4}+\frac{x^2+4}{8-2x^2}-\frac{2}{x^2+2x}$
4. Розв'яжіть задачу *(3 бали)*:	
Катер, власна швидкість якого 8 км/год, пройшов за течією річки 15 км і таку саму відстань проти течії річки, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії річки	Спортивний човен пройшов відстань 45 км проти течії річки і таку саму відстань за течією, витративши на весь шлях 14 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна 7 км/год
5. Розв'яжіть рівняння відносно змінної x *(3 бали)*:	
$\frac{(x-a)(x-3)}{x-2}=0$	$\frac{(x-a)(x+2)}{x+5}=0$

Для майбутніх абітурієнтів

Дробові раціональні рівняння з параметрами

Як і для лінійних рівнянь* корисно пам'ятати, що *рівняння з параметрами можна розв'язувати так само, як звичайні рівняння, але тільки до того часу, поки кожне потрібне перетворення можна виконати однозначно. Якщо ж якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язання потрібно розбити на декілька випадків.*

Для дробово-раціональних рівнянь слід також враховувати, що всі рівносильні перетворення рівнянь виконуються на області допустимих значень (ОДЗ) заданого рівняння (тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису рівняння), тому, перш ніж записати відповідь, *обов'язково слід врахувати ОДЗ заданого рівняння*.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x-3}=1+\frac{a}{x}$, де x — змінна.

Розв'язання	Пояснення
ОДЗ: $x\neq 3$, $x\neq 0$	Задані дробові вирази існують тоді і тільки тоді, коли знаменники заданих дробів не дорівнюють нулю
$x^2=x(x-3)+a(x-3)$, $x^2=x^2-3x+ax-3a$	Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз $x(x-3)$ — спільний знаменник дробів і одержимо ціле рівняння, яке за умови $x(x-3)\neq 0$ (тобто на ОДЗ заданого рівняння) рівносильне заданому
$3x-ax=3a$, $(3-a)x=3a$	Після зведення подібних доданків в одержаному лінійному рівнянні переносимо члени із змінною x в одну частину, а без x — в іншу і виносимо в лівій частині змінну x за дужки

* Див. посібник: Нелін Є. П. Алгебра. 7 клас: Опорні таблиці, схеми розв'язування, тренувальні тести.— Х.: Веста: Видавництво «Ранок», 2008.— 112 с.

Для знаходження змінної x ми б хотіли поділити обидві частини останнього рівняння на $(3-a)$, але при $a=3$ ми будемо ділити на 0, що неможливо. Отже, починаючи з цього моменту, потрібно розглянути два випадки.

Наведені вище міркування можна наочно записати так:

$$\frac{x}{x-3}=1+\frac{a}{x}.$$

Розв'язання

ОДЗ: $x\neq 3$, $x\neq 0$.

$$x^2=x(x-3)+a(x-3),\ x^2=x^2-3x+ax-3a,\ 3x-ax=3a.$$

$$\boxed{(3-a)x=3a}$$

$3-a=0$, $a=3$: $\boxed{0x=9 \text{ коренів немає}}$

$3-a\neq 0$, $a\neq 3$: $\boxed{x=\frac{3a}{3-a}}$

З'ясуємо, при яких значеннях a знайдені корені не входять до ОДЗ. Для цього з'ясуємо, коли $x=3$ і $x=0$.

$\frac{3a}{3-a}=3$, тоді $3a=3(3-a)$, $3a=9-3a$, $a=\frac{3}{2}$. Отже, при $a=\frac{3}{2}$ маємо $x=3$ — сторонній корінь (не входить до ОДЗ), тобто при $a=\frac{3}{2}$ задане рівняння не має коренів.

$\frac{3a}{3-a}=0$, тоді $a=0$. Отже, при $a=0$ маємо $x=0$ — сторонній корінь (не входить до ОДЗ), тобто при $a=0$ задане рівняння не має коренів.

Відповідь: 1) при $a=3$, $a=0$, $a=\frac{3}{2}$ коренів немає;

2) при $a\neq 3$, $a\neq 0$, $a\neq\frac{3}{2}$ $x=\frac{3a}{3-a}$.

Приклад 2. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння

$$\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7}=0$$ має єдиний корінь.

Розв'язання	Пояснення
ОДЗ: $x \neq -7$	Заданий дробовий вираз існує тоді і тільки тоді, коли його знаменник не дорівнює нулю
$(x+a)(x-5a)=0$. Тоді	Оскільки дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, то на ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянню $(x+a)(x-5a)=0$
$x+a=0$ або $x-5a=0$. Одержуємо $x=-a$ або $x=5a$	Добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю
Врахуємо ОДЗ. Для цього з'ясуємо, коли $x=-7$: $-a=-7$ при $a=7$, $5a=-7$ при $a=-\frac{7}{5}$	З'ясуємо, при яких значеннях a знайдені корені не входять до ОДЗ. Для цього з'ясуємо, коли $x=-7$, тобто прирівняємо знайдені корені до 7 і знайдемо відповідні значення a
Тоді при $a=7$ одержуємо: $x=-a=-7$ — сторонній корінь; $x=5a=35$ — єдиний корінь. При $a=-\frac{7}{5}$ одержуємо: $x=5a=-7$ — сторонній корінь; $x=-a=\frac{7}{5}$ — єдиний корінь. Також задане рівняння буде мати єдиний корінь, якщо $-a=5a$, тобто при $a=0$ (тоді $x=-a=0$ і $x=5a=0 \neq -7$). *Відповідь*: $a=7$, $a=-\frac{7}{5}$, $a=0$	При знайдених значеннях a один із двох одержаних коренів буде стороннім $(x=-7)$ і рівняння буде мати єдиний корінь. Крім того, задане рівняння буде мати єдиний корінь (одне значення кореня) ще і в тому випадку, коли два одержані корені ($x=-a$ та $x=5a$) будуть збігатися (і, звичайно, входити до ОДЗ)

Тренувальні вправи

1. Розв'яжіть рівняння зі змінною x.

   а) $\frac{x-a}{x+6}=0$; б) $\frac{x-3}{x-a}=0$; в) $\frac{(x-a)(x-5)}{x+1}=0$; г) $\frac{a(x-2)}{x-7}=0$.

2. Розв'яжіть рівняння зі змінною x.

   а) $\frac{2}{x-4}=\frac{1}{x-a}\cdot\frac{3}{x-1}=\frac{a}{x+5}$; б) $\frac{a}{x+2}=\frac{1}{x+1}$;

   в) $\frac{3}{x-1}=\frac{a}{x+5}$; г) $\frac{2x}{x+2}=2+\frac{a}{x}$.

3. Знайдіть усі значення a, при яких задане рівняння не має коренів.

   а) $\frac{x+a}{x^2-9}=0$; б) $\frac{x-a}{x^2-16}=0$; в) $\frac{x-2a}{x(x-4)}=0$.

4. Знайдіть усі значення a, при яких задане рівняння має єдиний корінь.

   а) $\frac{(x-a)(x-2a)}{x-4}=0$; б) $\frac{(x+2a)(x-6a)}{x+12}=0$.

РОЗДІЛ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Таблиця 7. **Перетворення виразів із квадратними коренями**

Означення	
Квадратним коренем із числа a називається число, квадрат якого дорівнює a	**Арифметичним квадратним коренем** із числа a називається **невід'ємне** число, квадрат якого дорівнює a. Арифметичний квадратний корінь із числа a позначається $\sqrt{a}$ (a — підкореневий вираз)

Приклади			
Формулювання	**Обґрунтування**	**Позначення**	**Примітка**
1. Квадратний корінь із 9 дорівнює 3	$3^2=9$	$\sqrt{9}=3$	Арифметичний корінь
2. Квадратний корінь із 9 дорівнює (-3)	$\left(-3^2\right)=9$	Позначення немає	Не арифметичний корінь
3. Квадратний корінь із 0 дорівнює 0	$0^2=0$	$\sqrt{0}=0$	Арифметичний корінь
4. Квадратний корінь з 1 дорівнює 1	$1^2=1$	$\sqrt{1}=1$	Арифметичний корінь

Область визначення	
Зміст	**Приклади**
$\sqrt{a}$ має зміст тільки при $a \geqslant 0$ (отже, квадратний корінь із від'ємного числа не визначений)	$\sqrt{11}$ — має зміст; $\sqrt{-9}$ — не має змісту; вираз $\sqrt{x-3}$ має зміст тільки при $x-3 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant 3$

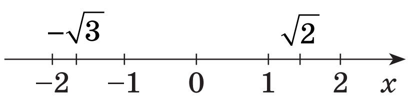
Властивості арифметичних квадратних коренів	
Рівність $\sqrt{a}=b$ (при $a\geqslant 0$) правильна тоді і тільки тоді, коли $\begin{cases} b\geqslant 0, \\ b^2=a \end{cases}$	$\sqrt{a^2}=a$ тільки при $a\geqslant 0$
Для будь-якого значення a $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$	$\sqrt{(-5)^2}=\lvert -5\rvert=5;$ $\sqrt{9y^2}=\sqrt{(3y)^2}=\lvert 3y\rvert=3\lvert y\rvert$
При $a\geqslant 0$ $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$	$\left(\sqrt{9}\right)^2=9;\ \left(\sqrt{7}\right)^2=7$

Корінь із добутку	
Формула	**Приклад**
При $a\geqslant 0;\ b\geqslant 0$: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$\sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12;$ $\sqrt{25a}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{a}=5\sqrt{a}$
При будь-яких a і b, таких, що $ab\geqslant 0$: $\sqrt{ab}=\sqrt{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt{\lvert b\rvert}$	$\sqrt{(-9)\cdot(-16)}=\sqrt{\lvert -9\rvert}\cdot\sqrt{\lvert -16\rvert}=$ $=\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12.$ Якщо $x\leqslant 0$ і $y\leqslant 0$, то $\lvert x\rvert=-x$, $\lvert y\rvert=-y$, тому $\sqrt{xy}=\sqrt{\lvert x\rvert}\cdot\sqrt{\lvert y\rvert}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}$

Корінь із частки	
При $a\geqslant 0;\ b>0$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\dfrac{81}{100}}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}}=\dfrac{9}{10}.$
При будь-яких a і b, таких, що $\dfrac{a}{b}\geqslant 0$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{\lvert a\rvert}}{\sqrt{\lvert b\rvert}}$	$\sqrt{\dfrac{81}{100}}=\dfrac{\sqrt{\lvert 81\rvert}}{\sqrt{\lvert 100\rvert}}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}}=\dfrac{9}{10}.$ Якщо $x<0$ і $y<0$, то $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt{\lvert x\rvert}}{\sqrt{\lvert y\rvert}}=\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}$

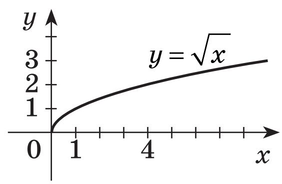
Корінь із степеня	
При $a \geqslant 0$: $\sqrt{a^{2k}} = a^k$	$\sqrt{3^{10}} = 3^5$; $\sqrt{7^6} = 7^3$
Для будь-яких a: $\sqrt{a^{2k}} = \sqrt{\left(a^k\right)^2} = \left\lvert a^k \right\rvert$	$\sqrt{(-5)^{14}} = \left\lvert (-5)^7 \right\rvert = 5^7$; $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^6} = \left\lvert \left(1-\sqrt{3}\right)^3 \right\rvert = \left(\sqrt{3}-1\right)^3$ ($1-\sqrt{3}<0$, тому $\left\lvert 1-\sqrt{3} \right\rvert = \sqrt{3}-1$)
Винесення множника з-під знака кореня	
При $a \geqslant 0$; $b \geqslant 0$: $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$	$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
Для будь-яких a $(b \geqslant 0)$: $\sqrt{a^2 b} = \lvert a \rvert \sqrt{b}$	$\sqrt{3x^2} = \lvert x \rvert \sqrt{3}$; $\sqrt{(-7)^2 \cdot 5} = \lvert -7 \rvert \sqrt{5} = 7\sqrt{5}$
Внесення множника під знак кореня	
При $a \geqslant 0$; $b \geqslant 0$: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$	$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$; $x^2\sqrt{y} = \sqrt{\left(x^2\right)^2 y} = \sqrt{x^4 y}$ (враховано, що $x^2 \geqslant 0$ завжди)
Для будь-яких a $(b \geqslant 0)$: $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b} & \text{при } a \geqslant 0, \\ -\sqrt{a^2 b} & \text{при } a < 0 \end{cases}$	Якщо $x<0$, то $x\sqrt{y} = -\sqrt{x^2 y}$
Порівняння виразів із квадратними коренями	
При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, якщо $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$	

Таблиця 8. **Дійсні числа**

Означення та зміст	Приклади
Раціональними числами називають числа, які можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число. Множина раціональних чисел (***Q***) складається з цілих і дробових чисел	$\frac{2}{7}$; $0,3=\frac{3}{10}$; $0=\frac{0}{1}$; $-5=\frac{-5}{1}$ — раціональні числа
Кожне **раціональне число** можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. І навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб зображає деяке раціональне число	Раціональне число $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3}=0,3333...=0,(3)$. Для раціонального числа 5: $5=5,0000...$
Числа, які зображаються нескінченними **неперіодичними** дробами, називають **ірраціональними**	$\sqrt{2}=1,4142135...$; $\pi=3,1415926...$ — ірраціональні числа
Раціональні та ірраціональні числа складають множину **дійсних** чисел (***R***)	$0,5$; $\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; π; $2+\sqrt{3}$ — дійсні числа
На числовій прямій кожному дійсному числу відповідає єдина точка, і навпаки, кожній точці числової прямої відповідає єдине дійсне число	
Корисно пам'ятати. Квадратний корінь із натурального числа ($\sqrt{n}$, де $n \in N$) завжди буде або натуральним числом, або ірраціональним	$\sqrt{16}=4$ — натуральне число, $\sqrt{169}=13$ — натуральне число, $\sqrt{5}$ не може бути натуральним (оскільки $2<\sqrt{5}<3$), тому $\sqrt{5}$ — ірраціональне число

Деякі властивості раціональних та ірраціональних чисел	
Сума, різниця, добуток і частка (якщо дільник не дорівнює нулю) двох або декількох раціональних чисел завжди є раціональним числом	$\frac{2}{7}$ — раціональне число, $0{,}13$ — раціональне число, отже, $\frac{2}{7}+0{,}13$ — раціональне число
Якщо з двох чисел одне раціональне, а друге ірраціональне, то їх сума, різниця, добуток і частка завжди будуть ірраціональними числами (добуток і частка тільки у випадку, коли раціональне число не дорівнює нулю)	3 — раціональне число, $\sqrt{5}$ — ірраціональне число, тоді $3+\sqrt{5}$; $3-\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$ — ірраціональні числа

Таблиця 9. **Функція $y=\sqrt{x}$**

<table>
<tr><th colspan="2">Властивості</th><th>Графік</th></tr>
<tr><td>1. Область визначення</td><td>$x \geqslant 0$</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>2. Область значень</td><td>$y \geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>3. Точки перетину з осями координат</td><td>Оскільки при $x=0$ значення $y=0$, то графік проходить через початок координат</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. При збільшенні аргументу значення функції збільшуються (функція зростає)</td></tr>
</table>

Розв’язування вправ

1. Спростіть вираз $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$.

План	Розв’язання
Спочатку використаємо формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, а потім означення квадратного кореня: $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$	$\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1$. *Відповідь*: 1

2. Обчисліть: а) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{80}$; б) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$.

План	Розв’язання
Використаємо формули кореня з добутку і частки справа наліво, тобто $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\geqslant 0;\ b\geqslant 0)$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(a\geqslant 0;\ b\geqslant 0)$	а) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{80}=\sqrt{5\cdot 80}=\sqrt{400}=20$; б) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{75}{3}}=\sqrt{25}=5$

3. Розкладіть на множники: а) x^2-3; б) $\sqrt{21}-\sqrt{7}$; в) $x-\sqrt{5x}$.

План	Розв’язання
У пунктах «а» і «в») врахуємо, що при $a\geqslant 0$ $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$, а потім використаємо в пункті «а» формулу різниці квадратів, а в пунктах «б» і «в» винесемо за дужки спільний множник	а) $x^2-3=x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$; б) $\sqrt{21}-\sqrt{7}=\sqrt{7\cdot 3}-\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{7}=$ $=\sqrt{7}\left(\sqrt{3}-1\right)$; в) заданий вираз існує тільки при $x\geqslant 0$. Тоді $x-\sqrt{5x}=\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}=$ $=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)$

4. Скоротіть дріб $\dfrac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$.

План	Розв'язання
Врахуємо, що при $a \geqslant 0$ $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$, і розкладемо чисельник дробу на множники, щоб виконати скорочення дробу	Заданий вираз існує тільки при $a \geqslant 0$, але тоді $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$. Отже, $\dfrac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+3\right)}{\sqrt{a}+3}=\sqrt{a}$

5. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}$.

План	Розв'язання
а) Якщо домножити чисельник і знаменник на $\sqrt{7}$ $\left(\sqrt{7}\neq 0\right)$, то в знаменнику одержимо $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$	а) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$
б) Якщо домножити чисельник і знаменник на $\sqrt{3}+1$ $\left(\sqrt{3}+1\neq 0\right)$, то в знаменнику одержимо різницю квадратів, і після використання формули $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ у знаменнику не буде кореня	б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=$ $=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}=\sqrt{3}+1$
в) Аналогічно до пункту «б» домножимо чисельник і знаменник на $\sqrt{a}-2$ (щоб одержати в знаменнику різницю квадратів).	в) Нехай $A=\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}$. 1) При $a=4$ $A=\dfrac{1}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{1}{4}$;

Але при $a=4$ ми домножимо чисельник і знаменник на 0, чого робити не можна. Тому випадок $a=4$ розглянемо окремо	2) при $a \neq 4$ (і $a \geqslant 0$, щоб існував заданий вираз) $A=\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}=\dfrac{\sqrt{a}-2}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-4}$. *Відповідь*: 1) при $a=4$ $A=\dfrac{1}{4}$; 2) при $a \neq 4$ $(a \geqslant 0)$ $A=\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-4}$.

6. Винесіть множник з-під знака кореня $\sqrt{36x^2y}$, якщо:
   а) $x>0$; б) $x<0$.

План	Розв'язання
При винесенні множника з-під знака кореня врахуємо, що $\sqrt{a^2}=\lvert a \rvert$	$\sqrt{36x^2y}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y}=6\lvert x \rvert\sqrt{y}$; а) при $x>0$ $\lvert x \rvert = x$, тоді $\sqrt{36x^2y}=6x\sqrt{y}$; б) при $x<0$ $\lvert x \rvert=-x$, тоді $\sqrt{36x^2y}=-6x\sqrt{y}$

7. Внесіть множник під знак кореня:
   а) $5\sqrt{7}$; б) $x^3\sqrt{x}$ при $x>0$; в) $x^3\sqrt{x}$ при $x<0$.

План	Розв'язання
При внесенні множника під знак кореня, крім формули $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$ при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, слід враховувати, що вираз $\sqrt{a^2b}$ — це арифметичне значення кореня і він завжди тільки більше або дорівнює нулю (тому у випадку, коли заданий вираз від'ємний — у завданні «в»,— доводиться ставити перед коренем знак «−»)	а) $5\sqrt{7}=\sqrt{5^2\cdot 7}=\sqrt{25\cdot 7}=\sqrt{175}$; б) при $x>0$ $x^3>0$, отже, $x^3\sqrt{x}=\sqrt{\left(x^3\right)^2\cdot x}=\sqrt{x^6\cdot x}=\sqrt{x^7}$; в) при $x<0$ $x^3<0$, отже, $x^3\sqrt{x}=-\sqrt{\left(x^3\right)^2\cdot x}=-\sqrt{x^6\cdot x}=-\sqrt{x^7}$

8. Порівняйте числа $3\sqrt{5}$ і $5\sqrt{3}$.

План	Розв'язання
Внесемо множники, які стоять перед коренями, під знаки коренів і врахуємо, що корінь квадратний із більшого числа більший за корінь квадратний із меншого числа	$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot5}=\sqrt{9\cdot5}=\sqrt{45}$; $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot3}=\sqrt{25\cdot3}=\sqrt{75}$. Оскільки $75>45$, то $5\sqrt{3}>3\sqrt{5}$

9. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-5}=3$; б) $\sqrt{x+2}=-1$; в) $\sqrt{7+x}=6$.

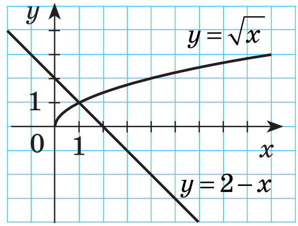
План	Розв'язання
Використаємо означення арифметичного квадратного кореня. Для рівняння з пункту «б» згадуємо, що арифметичний квадратний корінь не може бути від'ємним (отже, це рівняння не має коренів), а для пунктів «а» і «в» згадуємо, що рівність $\sqrt{a}=b$ (при $b\geqslant0$) правильна тоді і тільки тоді, коли $a=b^2$	а) За означенням квадратного кореня, якщо $\sqrt{x-5}=3$, то $x-5=3^2$. Тоді $x=14$. б) Рівняння $\sqrt{x+2}=-1$ коренів не має, оскільки значення $\sqrt{x+2}$ не може бути від'ємним. в) $\sqrt{7+x}=6$, тоді $7+x=6^2$, отже, $x=29$. *Відповідь*: а) 14; б) коренів немає; в) 29

10. Чи належить графіку функції $y=\sqrt{x}$ точка:

а) $A(0{,}16;\ 0{,}4)$; б) $B(144;\ 10)$?

План	Розв'язання
Точка $M(a;\ b)$ належить графіку функції $y=f(x)$ тоді і тільки тоді, коли $f(a)=b$. Отже, нам потрібно перевірити, що при $x=a$ буде виконуватися рівність $y=\sqrt{x}=\sqrt{a}=b$	а) При $x=0{,}16$ значення $y=\sqrt{x}=\sqrt{0{,}16}=0{,}4$. Отже, точка $A(0{,}16;\ 0{,}4)$ належить графіку функції $y=\sqrt{x}$. б) При $x=144$ значення $y=\sqrt{x}=\sqrt{144}=12\neq10$. Отже, точка $B(144;\ 10)$ не належить графіку функції $y=\sqrt{x}$

11. Розв’яжіть графічно рівняння $\sqrt{x}=2-x$.

<table>
<tr><th>План</th><th>Розв’язання</th></tr>
<tr><td>Щоб розв’язати графічно рівняння, будуємо (в одній системі координат) графіки функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння, і знаходимо абсциси їх точок перетину</td><td>Будуємо графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=2-x$.
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>0</td></tr></table>
Побудовані графіки перетинаються в одній точці з абсцисою $x=1$. Це точне значення кореня, оскільки $\sqrt{1}=2-1$; $1=1$.
Відповідь: 1</td></tr>
</table>

Тренувальні вправи

1. Обчисліть значення виразу:

   а) $\sqrt{81}+\sqrt{100}$; б) $\sqrt{49}+\sqrt{0,01}$; в) $\sqrt{64}+\sqrt{121}$;

   г) $\sqrt{0,04}+\sqrt{0,25}$.

2. Обчисліть значення виразу:

   а) $2\sqrt{5-2a}$ при $a=-2$; б) $\sqrt{4x+6}$ при $x=2,5$.

3. Спростіть вираз:

   а) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{50}-6\sqrt{2}$; в) $\left(\sqrt{17}+\sqrt{2}\right)^2-19$; г) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$;

   д) $\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)$; е) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}$; є) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$.

4. Обчисліть: а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{98}$; б) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}$; в) $\frac{\sqrt{245}}{\sqrt{5}}$; г) $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{3}}$.

5. Розкладіть на множники: а) a^2-7; б) $\sqrt{33}-\sqrt{11}$; в) $\sqrt{2x}-x$.

6. Скоротіть дріб:

а) $\frac{x-25}{\sqrt{x}+5}$; б) $\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$; в) $\frac{\sqrt{a}+a}{1+\sqrt{a}}$; г) $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$.

7. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{7}+1}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$; г) $\frac{3}{\sqrt{a}+3}$.

8. Винесіть множник з-під знака кореня $\sqrt{64a^2b}$, якщо:
а) $a>0$; б) $a<0$.

9. Внесіть множник під знак кореня:
а) $3\sqrt{11}$; б) $a^5\sqrt{a}$ при $a>0$; в) $a^5\sqrt{a}$ при $a<0$.

10. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{\sqrt{a}}{a-b}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}}{b-a}$; 2) $\sqrt{x}:\left(\frac{1}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{x-y}\right)$.

11. Чи належить графіку функції $y=\sqrt{x}$ точка:

а) $A(0,36;\ 0,6)$; б) $B(64;\ 10)$; в) $C\left(8;\ 2\sqrt{2}\right)$?

12. Порівняйте числа:
а) $2\sqrt{7}$ і $3\sqrt{3}$; б) $5\sqrt{3}$ і $4\sqrt{5}$; в) $6\sqrt{2}$ і $2\sqrt{17}$; г) $7\sqrt{3}$ і $4\sqrt{10}$.

13. Розв'яжіть рівняння:
а) $\sqrt{x}=5$; б) $\sqrt{x-1}=-5$; в) $\sqrt{3-x}=2$; г) $\sqrt{2x-3}=7$.

14. Розв'яжіть графічно рівняння:
а) $\sqrt{x}=6-x$; б) $\sqrt{x}=3-2x$; в) $\sqrt{x}=10-2x$.

Тренувальні тести для підготовки до контрольної роботи та тематичного оцінювання

Обведіть літери, що відповідають твердженням, які ви вважаєте правильними, та закресліть літери, що відповідають твердженням, які ви вважаєте неправильними.

Частина 1

1 рівень

1. Рівність $\sqrt{a}=b$ означає, що $b^2=a$. Виберіть правильне твердження.
   А. $\sqrt{14}=4$. **Б.** $\sqrt{15}=4$. **В.** $\sqrt{16}=4$. **Г.** $\sqrt{17}=4$.
2. Враховуючи, що вираз $\sqrt{a}$ існує тільки при $a\geqslant 0$, виберіть правильне твердження.
   А. Значення $\sqrt{-16}$ існує.
   Б. Значення $\sqrt{-9}$ існує.
   В. Значення $\sqrt{-25}$ існує.
   Г. Значення $\sqrt{11}$ існує.
3. Враховуючи, що $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ при $a\geqslant 0$, виберіть правильне твердження.
   А. $\left(\sqrt{9}\right)^2=3$. **Б.** $\left(\sqrt{14}\right)^2=14$.
   В. $\left(\sqrt{16}\right)^2=4$. **Г.** $\left(\sqrt{15}\right)^2=225$.

2 рівень

4. Задано число $\sqrt{2}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.
   А. $\sqrt{2}>1$. **Б.** $\sqrt{2}>2$. **В.** $\sqrt{2}<2$.
   Г. Число $\sqrt{2}$ — раціональне число.
5. Використовуючи формулу $\sqrt{a^2}=|a|$, позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. $\sqrt{(-3)^2}<0$. Б. $\sqrt{(-3)^2}=-3$. В. $\sqrt{(-3)^2}=|-3|$. Г. $\sqrt{(-3)^2}=3$.

6. Використовуючи формули $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ і $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ($a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$), позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. $\sqrt{16\cdot 36}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{36}$. Б. $\sqrt{16\cdot 36}=28$.

В. $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{100}$. Г. $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}>20$.

3 рівень

7. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень щодо значень квадратних коренів правильні, а які — неправильні.

А. Оскільки $(-2)^2=4$, то одним із квадратних коренів із чотирьох є 2.

Б. $\sqrt{(-2)^2}=-2$.

В. Арифметичне значення кореня квадратного з чотирьох дорівнює 2.

Г. Якщо $\sqrt{x}=2$, то $x=4$.

8. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень щодо добування квадратного кореня із степеня правильні, а які — неправильні.

А. $\sqrt{2^6}=2^3$. Б. $\sqrt{(-2)^6}=(-2)^3$. В. $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}=2-\sqrt{7}$.

Г. $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{7}-2$.

9. Позначте, які з наведених тверджень, пов'язані з добуванням квадратного кореня з добутку та частки, правильні, а які — неправильні.

А. $\sqrt{15}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$. Б. $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. В. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}=18$.

Г. $\sqrt{\dfrac{25}{64}}=\dfrac{5}{6}$.

4 рівень

10. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень щодо належності чисел до раціональних або ірраціональних, правильні, а які — неправильні.

   А. Сума раціонального й ірраціонального чисел може бути раціональним числом.

   Б. $2+\sqrt{5}$ — ірраціональне число.

   В. Добуток раціонального й ірраціонального чисел може бути раціональним числом.

   Г. $3\sqrt{5}$ — ірраціональне число.

11. Задано вираз $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

   А. Підкореневий вираз можна подати у вигляді $\left(m-\sqrt{5}\right)^2$, де m — деяке ціле число.

   Б. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$.

   В. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

   Г. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\left|2-\sqrt{5}\right|$.

12. Позначте, які з наведених тверджень, пов'язаних з добуванням квадратного кореня з добутку, правильні, а які — неправильні.

   А. Якщо $ab\geqslant 0$, то $\sqrt{ab}$ обов'язково дорівнює $\sqrt{a}\sqrt{b}$.

   Б. Якщо $ab\geqslant 0$, то $\sqrt{|ab|}$ обов'язково дорівнює $\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$.

   В. Якщо $ab\geqslant 0$, то $\sqrt{ab}$ обов'язково дорівнює $\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$.

   Г. $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{10}\right)}=\sqrt{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{10}-3}$.

Частина 2

1 рівень

1. Задано вираз $\frac{2}{\sqrt{7}}$. Виберіть правильне твердження щодо звільнення знаменника заданого дробу від ірраціональності.
   А. Якщо помножити чисельник і знаменник заданого виразу на $\sqrt{7}$, то в знаменнику одержимо не раціональне число.
   Б. $\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **В.** $\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$. **Г.** $\frac{2}{\sqrt{7}}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$.
2. Враховуючи, що при $a\geqslant 0$ виконується рівність $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, виберіть правильне твердження.
   А. $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 15}$. **Б.** $\sqrt{45}=3\sqrt{15}$.
   В. $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$. **Г.** $\sqrt{45}=5\sqrt{3}$.
3. Враховуючи, що при $a\geqslant 0$ виконується рівність $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$, виберіть правильне твердження.
   А. $6\sqrt{2}=\sqrt{6\cdot 2}$. **Б.** $6\sqrt{2}=\sqrt{6\cdot 2^2}$.
   В. $6\sqrt{2}=\sqrt{6^2\cdot 2^2}$. **Г.** $6\sqrt{2}=\sqrt{6^2\cdot 2}$.

2 рівень

4. Дріб $\frac{3}{\sqrt{5}+1}$ звільняють від ірраціональності в знаменнику за допомогою множення чисельника і знаменника на той же самий вираз. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.
   А. Якщо помножити чисельник і знаменник заданого виразу на $\sqrt{5}-1$, то знаменник можна записати без квадратних коренів.
   Б. Якщо помножити чисельник і знаменник заданого виразу на $\sqrt{5}+1$, то знаменник можна записати без квадратних коренів.
   В. $\frac{3}{\sqrt{5}+1}=\frac{3}{4}$. **Г.** $\frac{3}{\sqrt{5}+1}=\frac{3\sqrt{5}-3}{4}$.

5. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень щодо винесення множника з-під знака квадратного кореня правильні, а які — неправильні.

А. $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$. **Б.** $\sqrt{63} = 7\sqrt{3}$.

В. $\sqrt{100a} = 10\sqrt{a}$. **Г.** $\sqrt{100a} = -10\sqrt{a}$.

6. Користуючись формулою $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$ при $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$, позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. $-5\sqrt{3} = \sqrt{(-5)^2 \cdot 3}$. **Б.** $-5\sqrt{3} = -\sqrt{(-5)^2 \cdot 3}$.

В. $(-2)\cdot\sqrt{3} = \sqrt{(-2)^2 \cdot 3}$. **Г.** $(-2)\cdot\sqrt{3} = -\sqrt{(-2)^2 \cdot 3}$.

3 рівень

7. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень щодо звільнення знаменників заданих дробів від ірраціональності правильні, а які — неправильні.

А. $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$. **Б.** $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

В. $\frac{2}{\sqrt{7}-3} = -\sqrt{7}-3$. **Г.** $\frac{2}{\sqrt{7}-3} = \sqrt{7}+3$.

8. Розглядають значення двох виразів $3\sqrt{5}$ і $5\sqrt{3}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$. **Б.** $5\sqrt{3} = \sqrt{15}$. **В.** $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$. **Г.** $3\sqrt{5} > 5\sqrt{3}$.

9. Задано вираз $\frac{a^2-3}{a-\sqrt{3}}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. $a^2 - 3$ можна розкласти як різницю квадратів двох виразів.

Б. $a^2 - 3 = \left(a^2 - \sqrt{3}\right)\left(a^2 + \sqrt{3}\right)$.

В. Після спрощення заданого виразу можна одержати $a + \sqrt{3}$.

Г. Після спрощення заданого виразу можна одержати $a + 3$.

4 рівень

10. Задано вираз $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень щодо звільнення знаменника заданого дробу від ірраціональності правильні, а які — неправильні.

А. При $a=1$ значення заданого виразу — дріб, у якого немає ірраціональності в знаменнику.

Б. Якщо чисельник і знаменник заданого дробу помножити на $\sqrt{a}-1$, то при всіх $a \geqslant 0$ обов'язково одержуємо дріб, рівний даному.

В. Якщо при $a \geqslant 0$ чисельник і знаменник заданого дробу помножити на $\sqrt{a}-1$, то одержуємо дріб, рівний даному тільки при $a \neq 1$.

Г. $\frac{1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$ тільки при $a \geqslant 0$ і $a \neq 1$.

11. Задано вираз $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, де $x \geqslant 1$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Якщо $\sqrt{x-1}=a$, то $x=a^2+1$.

Б. Якщо $\sqrt{x-1}=a$, то $x-2\sqrt{x-1}=(a+1)^2$.

В. Для всіх $x \geqslant 1$ заданий вираз дорівнює $\sqrt{x-1}-1$.

Г. Для всіх $x \geqslant 1$ заданий вираз дорівнює $\left|\sqrt{x-1}-1\right|$.

12. Задано вираз $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{4\sqrt{a}}{a-1}\right):\frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. При $a \geqslant 0$ вираз $a-1$ можна подати як різницю квадратів двох виразів.

Б. $a+\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)$.

В. Вираз у дужках можна подати у вигляді $\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$.

Г. Після спрощення заданого виразу можна одержати $\sqrt{a}$.

Контрольна робота

B-I	7 балів	B-II
1. Обчисліть значення виразу *(1 бал)*:		
$\sqrt{900}+\sqrt{0,36}$		$\sqrt{400}+\sqrt{0,01}$
2. Спростіть вираз *(2 бали)*:		
а) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$		а) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$
3. Винесіть множник з-під знака кореня *(2 бали)*:		
а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{y^5}$		а) $\sqrt{75}$; б) $\sqrt{x^7}$
4. Внесіть множник під знак кореня *(2 бали)*:		
а) $5\sqrt{7}$; б) $a^3\sqrt{a}$		а) $4\sqrt{5}$; б) $a^5\sqrt{a}$

B-III	9 балів	B-IV
1. Обчисліть значення виразу *(1 бал)*:		
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$		$\sqrt{7}\cdot\sqrt{63}$
2. Розкладіть на множники *(2 бали)*:		
а) a^2-5; б) $\sqrt{28}-\sqrt{7}$		а) $x^2-7=0$; б) $\sqrt{75}-\sqrt{5}$
3. Винесіть множник з-під знака кореня *(2 бали)*:		
а) $\sqrt{108}$; б) $\sqrt{5a^2}$, якщо $a<0$		а) $\sqrt{128}$; б) $\sqrt{7b^2}$, якщо $b<0$
4. Внесіть множник під знак кореня *(2 бали)*:		
а) $0,3\sqrt{11}$; б) $a^3\sqrt{b}$, якщо $a<0$		а) $0,5\sqrt{7}$; б) $b^5\sqrt{a}$, якщо $b<0$
5. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу *(2 бали)*:		
а) $\frac{2}{\sqrt{11}}$; б) $\frac{10}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}$		а) $\frac{3}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$

B-V	12 балів	B-VI
1. Обчисліть значення виразу *(2 бали)*:		
$\left(2\sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2+\left(1+2\sqrt{15}\right)^2$		$\left(3\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)^2-\left(3\sqrt{14}-1\right)^2$
2. Скоротіть дріб *(2 бали)*:		
а) $\dfrac{x-25}{\sqrt{x}+5}$; б) $\dfrac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$		а) $\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-4}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}$
3. Винесіть множник з-під знака кореня *(2 бали)*:		
а) $\sqrt{c^7}$; б) $\sqrt{-c^{15}}$		а) $\sqrt{a^9}$; б) $\sqrt{-a^{11}}$
4. Внесіть множник під знак кореня *(2 бали)*:		
$a^5\sqrt{c}$: а) якщо $a>0$; б) якщо $a<0$		$a^9\sqrt{b}$: а) якщо $a>0$; б) якщо $a<0$
5. Спростіть вираз *(2 бали)*:		
$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right):\dfrac{b\sqrt{a}}{a-b}$		$\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{(a-b)\sqrt{b}}{a}$
6. Розв’яжіть графічно рівняння *(2 бали)*:		
$\sqrt{x}=4-3x$;		$\sqrt{x}=\dfrac{1}{x}$

Для майбутніх абітурієнтів

Використання узагальнених формул перетворення квадратних коренів

Основна частина формул, які виражають властивості квадратних коренів, обґрунтована для невід’ємних значень підкореневих виразів. Але інколи доводиться виконувати перетворення виразів із квадратними коренями і в тому випадку, коли таких обмежень немає. Наприклад, добути корінь квадратний із добутку *ab* від’ємних чисел ($a<0$, $b<0$). Тоді $ab>0$ і $\sqrt{ab}$ існує, проте формулою

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \qquad (1)$$

скористатися не можна: вона обґрунтована тільки для невід'ємних значень a і b. Але у випадку $ab>0$ маємо: $ab=|ab|=|a|\cdot|b|$, і тепер $|a|>0$ і $|b|>0$.

Отже, для добування кореня з добутку $|a|\cdot|b|$ можна використати формулу (1).

Тоді при $a<0$, $b<0$ можемо записати:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{|ab|}=\sqrt{|a|\cdot|b|}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}.$$

Зазначимо, що одержана формула справедлива і при $a<0$, $b<0$, оскільки в цьому випадку $|a|=a$ і $|b|=b$. Отже, при $ab\geqslant 0$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}. \qquad (2)$$

Аналогічно можна узагальнити формулу для добування квадратного кореня з частки, з парного степеня, винесення множника з-під знака кореня та внесення множника під знак кореня (див. таблицю).

Формули перетворення квадратних коренів

№ з/п	**Формула** (формули використовуються тільки для невід'ємних значень a і b, тобто для $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$)	**Узагальнена формула** (для будь-яких a і b з ОДЗ лівої частини формули)
1	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$\sqrt{ab}=\sqrt{\vert a\vert}\cdot\sqrt{\vert b\vert}$ (при $ab\geqslant 0$)
2	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{\vert a\vert}}{\sqrt{\vert b\vert}}$ (при $\frac{a}{b}\geqslant 0$)
3	$\sqrt{a^{2n}}=a^n$	$\sqrt{a^{2n}}=\vert a\vert^n$ (при будь-яких a)
4	$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$	$\sqrt{a^2b}=\vert a\vert\cdot\sqrt{b}$ (при будь-яких a і $b\geqslant 0$)
5	$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$	$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b} \text{ при } a\geqslant 0,\\ -\sqrt{a^2b} \text{ при } a<0,\ b\geqslant 0\end{cases}$

Таким чином, якщо за умовою завдання на перетворення виразів із квадратними коренями (ірраціональних виразів) відомо, що всі букви (які входять до запису заданого виразу) невід'ємні, то для перетворення цього виразу можна користуватися основними формулами, а якщо такої умови немає, то доводиться аналізувати ОДЗ заданого виразу і тільки після цього вирішувати, якими формулами користуватися — основними чи узагальненими.

Приклад 1. Винести множник з-під знака кореня $\sqrt{-x^7}$.

Розв'язання	Пояснення
ОДЗ: $x \leqslant 0$. $\sqrt{-x^7} = \sqrt{-x \cdot x^6} =$ $= \sqrt{-x} \cdot \sqrt{x^6} =$ $= \lvert x \rvert^3 \cdot \sqrt{-x}$. При $x \leqslant 0$ значення $\lvert x \rvert = -x$, тоді $\lvert x \rvert^3 \cdot \sqrt{-x} =$ $= (-x)^3 \sqrt{-x} =$ $= -x^3 \sqrt{-x}$. Отже, $\sqrt{-x^7} = -x^3 \sqrt{-x}$	При виконанні тотожних перетворень можна не знаходити ОДЗ заданого виразу, а безпосередньо використовувати відомі формули. Але це можна робити тільки в тому випадку, коли ОДЗ заданого виразу збігається з тією множиною, для якої було доведено ці формули (або входить у неї). Оскільки всі формули перетворень ірраціональних виразів були доведені для невід'ємних значень змінних, а ОДЗ заданого виразу: $-x^7 \geqslant 0$, тобто $x \leqslant 0$, то доведеться використовувати як основні, так і узагальнені формули. Зокрема, $\sqrt{-x^7} = \sqrt{-x \cdot x^6}$ і при $x \leqslant 0$ значення $(-x)$ і x^6 невід'ємні, тому для знаходження кореня з добутку можна використати основну формулу $\sqrt{-x \cdot x^6} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{x^6}$. А от для обчислення $\sqrt{x^6}$ при $x \leqslant 0$ доведеться використати узагальнену формулу 3: $\sqrt{x^6} = \lvert x \rvert^3$, а потім врахувати, що при $x \leqslant 0$ значення $\lvert x \rvert = -x$

Приклад 2. Спростіть вираз $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

Розв'язання	Пояснення
Позначимо $A = \dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$. При $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$ (і $b+\sqrt{ab} \neq 0$) маємо:	ОДЗ заданого виразу: $ab \geqslant 0$; $b+\sqrt{ab} \neq 0$. Але $ab \geqslant 0$ при $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} a \leqslant 0, \\ b \leqslant 0. \end{cases}$

Розв'язання	Пояснення
$A=\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$ $=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. При $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ (і $b+\sqrt{ab}\neq 0$) маємо: $A=\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\dfrac{-(-a)+\sqrt{\lvert a\rvert}\sqrt{\lvert b\rvert}}{-(-b)+\sqrt{\lvert a\rvert}\sqrt{\lvert b\rvert}}=$ $=\dfrac{-\left(\sqrt{-a}\right)^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}{-\left(\sqrt{-b}\right)^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}=$ $=\dfrac{\sqrt{-a}\left(-\sqrt{-a}+\sqrt{-b}\right)}{-\sqrt{-b}\left(\sqrt{-b}-\sqrt{-a}\right)}=$ $=-\sqrt{\dfrac{-a}{-b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. *Відповідь*: 1) при $a\geqslant 0$ і $b>0$ $A=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$; 2) при $a\leqslant 0$ і $b<0$ (з ОДЗ) $A=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$	При $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ ми маємо право користуватися всіма основними формулами перетворення коренів, а при $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ доведеться використати узагальнену формулу: $\sqrt{ab}=\sqrt{\lvert a\rvert}\sqrt{\lvert b\rvert}$ і врахувати, що при $a\leqslant 0$ одержуємо $(-a)\geqslant 0$, і тоді можна записати: $a=-(-a)=-\left(\sqrt{-a}\right)^2$. Аналогічно при $b\leqslant 0$ можна записати $b=-(-b)=-\left(\sqrt{-b}\right)^2$. Також слід врахувати, що при $a\leqslant 0$ і $b\leqslant 0$ маємо: $\lvert a\rvert=-a$ і $\lvert b\rvert=-b$

Приклад 3. Обчисліть значення виразу $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Розв'язання	Пояснення
Оскільки $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$, $7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$, то	Щоб знайти шлях до обчислення виразу $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, висловимо правдоподібне припущення про те, що підкореневий вираз $7+4\sqrt{3}$ є квадратом деякого виразу.

Розв'язання	Пояснення
$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$ $=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=$ $=\left\|2+\sqrt{3}\right\|+\left\|2-\sqrt{3}\right\|=$ $=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$	Вираз $7+4\sqrt{3}$ не може бути квадратом одночлена (він містить два члени). Перевіримо, чи не є цей вираз квадратом двочлена. Ми знаємо, що $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (1) і $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (2) Якщо один із доданків a або b у цих формулах матиме вигляд $k\sqrt{3}$ (де k — раціональне число), то до запису виразу $2ab$ також увійде $\sqrt{3}$. Таким чином, можна припустити, що $7+4\sqrt{3}$ — квадрат двочлена, причому доданок $4\sqrt{3}$ — це член $2ab$ у виразах (1) або (2). Оскільки в розглянутому виразі $7+4\sqrt{3}$ вірогідний член $2ab$ входить зі знаком «+», то $7+4\sqrt{3}$ може бути тільки квадратом суми двох чисел (див. формулу (1)). Враховуючи, що за нашим припущенням $2ab=4\sqrt{3}$, природно припустити, що $a=2$ і $b=\sqrt{3}$ (або $a=1$ і $b=2\sqrt{3}$). Знаходимо значення $(a+b)^2$: $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$. Тоді $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\left\|2+\sqrt{3}\right\|=2+\sqrt{3}$. Таким чином, правдоподібне припущення про те, що вираз $7+4\sqrt{3}$ є квадратом суми двох чисел, допомогло нам спростити вираз $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$. Аналогічно, висловлюючи правдоподібне припущення про те, що вираз $7-4\sqrt{3}$ є квадратом різниці двох виразів, одержуємо: $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left\|2-\sqrt{3}\right\|=2-\sqrt{3}$

Аналогічні міркування допомагають при перетвореннях не тільки числових, але й буквених виразів.

Приклад 4. Спростіть вираз $\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}$, якщо $\sqrt{x-2}>1$.

Розв'язання	Пояснення
$\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}=$ $=\sqrt{\left(1-\sqrt{x-2}\right)^2}=\left\|1-\sqrt{x-2}\right\|$. Враховуючи, що за умовою $\sqrt{x-2}>1$, одержуємо, що $1-\sqrt{x-2}<0$, отже, $\left\|1-\sqrt{x-2}\right\|=-\left(1-\sqrt{x-2}\right)=$ $=\sqrt{x-2}-1$. *Відповідь:* $\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}=\sqrt{x-2}-1$, якщо $\sqrt{x-2}>1$	Висловимо правдоподібне припущення, що підкореневий вираз $x-2\sqrt{x-2}-1$ є квадратом різниці двох виразів $(a-b)^2$ і, виходячи з того, що $2ab=2\sqrt{x-2}=2\cdot 1\cdot\sqrt{x-2}$, припускаємо, що $a=1$ і $b=\sqrt{x-2}$. Дійсно, знаходимо значення $(a-b)^2=\left(1-\sqrt{x-2}\right)^2=1-2\sqrt{x-2}+x-2=$ $=x-2\sqrt{x-2}-1$

Тренувальні вправи

Обчисліть значення виразу:

1. а) $\sqrt{(a+5)^2}$ при $a\leqslant -5$; б) $\sqrt{\dfrac{a^{22}}{b^8}}$ при $a\geqslant 0$, $b<0$.

2. а) $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{7}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(3+\sqrt{11}\right)^2}-\sqrt{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}$.

3. Винесіть множник з-під знака кореня:
а) $\sqrt{-x^{11}}$; б) $\sqrt{-a^2b^3}$, якщо $a<0$; в) $\sqrt{a^8b^{11}}$; г) $\sqrt{-a^8b^{11}}$.

4. Спростіть вираз:
а) $\dfrac{a}{\sqrt{ab}}$; б) $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$; в) $\dfrac{a-\sqrt{ab}}{b-\sqrt{ab}}$.

5. Обчисліть значення виразу:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{12-2\sqrt{11}}-\sqrt{12+2\sqrt{11}}$.

6. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$; б) $\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$, якщо $\sqrt{a-1}>1$;

в) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-1}}$, якщо $a>1$.

7. Знайдіть значення виразу:

а) $\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a-3}}-2}{\sqrt{a-3}-1}$, якщо $a=3{,}1$;

б) $\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a+2}}+3}{1-\sqrt{a+2}}$, якщо $a=0{,}1$.

8. Доведіть формулу складного кореня (радикала)*:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

якщо $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$, $A^2-B\geqslant 0$.

В к а з і в к а. Доведіть, що квадрат правої частини рівності дорівнює $A\pm\sqrt{B}$.

---

* Запис «±» у лівій і правій частинах формули в даному випадку означає, що знаки «+» або «–» беруться одночасно в лівій і правій частинах.

РОЗДІЛ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Таблиця 10. **Квадратні рівняння**

Означення або властивість	Приклади
Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x — змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називається **квадратним рівнянням**	$2x^2-5x+3=0$, $x^2-4=0$, $2x^2-3x=0$ — квадратні рівняння
Неповні квадратні рівняння	
Якщо у квадратному рівнянні другий коефіцієнт або вільний член дорівнює нулю ($b=0$ або $c=0$), то квадратне рівняння називається **неповним**	$-x^2+9=0$, $x^2-x=0$ — неповні квадратні рівняння
1) При $b=0$ і $c=0$ $(a \neq 0)$ $ax^2=0$ $x^2=0$ $x=0$ — єдиний корінь	$-5x^2=0$ *Розв'язання* $x^2=0$; $x=0$ *Відповідь*: 0
2) При $c=0$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$ виносимо за дужки спільний множник x: $ax^2+bx=0$; $x(ax+b)=0$; $x=0$ або $ax+b=0$; $x=0$ або $x=-\dfrac{b}{a}$ — два корені	$2x^2-6x=0$ *Розв'язання* $2x(x-3)=0$; $2x=0$ або $x-3=0$; $x=0$ або $x=3$. *Відповідь*: 0; 3
3) При $b=0$ $(a \neq 0;\ c \neq 0)$ приводимо рівняння до виду $x^2=d$: $ax^2+c=0$; $ax^2=-c$; $x^2=-\dfrac{c}{a}$	$3x^2+21=0$ *Розв'язання* $3x^2=-7$. *Відповідь*: коренів немає

Властивості	Приклади
Якщо $-\frac{c}{a}<0$, **коренів немає.** Якщо $-\frac{c}{a}>0$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ — **два корені**	$3x^2-21=0$ *Розв'язання* $3x^2=21$; $x^2=7$; $x=\pm\sqrt{7}$; $x_1=\sqrt{7}$; $x_2=-\sqrt{7}$. *Відповідь*: $\sqrt{7}$; $-\sqrt{7}$

Повні квадратні рівняння	
Повне квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ розв'язується за формулою $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$, де $\boxed{D=b^2-4ac}$ називається **дискримінантом** даного квадратного рівняння	
Якщо $\boldsymbol{D>0}$, то рівняння має **два різні корені** $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$	$3x^2-5x+2=0$ *Розв'язання* $D=5^2-4\cdot3\cdot2=1>0$; $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}$; $x_1=\frac{5+1}{6}=1$; $x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. *Відповідь*: 1; $\frac{2}{3}$
Якщо $\boldsymbol{D=0}$, то рівняння має **два однакові корені** $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$ (*одне значення кореня*, тому, рахуючи кількість коренів, кажуть, що *при $D=0$ рівняння має єдиний корінь*)	$x^2+6x+9=0$ *Розв'язання* $D=6^2-4\cdot1\cdot9=0$; $x_{1,2}=\frac{-6+\sqrt{0}}{2}$; $x_1=x_2=-\frac{6}{2}=-3$. *Відповідь*: -3
Якщо $\boldsymbol{D<0}$, то рівняння **не має дійсних коренів**	$2x^2+x+5=0$ *Розв'язання* $D=1^2-4\cdot2\cdot5=-39<0$ *Відповідь*: коренів немає

Зведені квадратні рівняння	
Означення або властивість	**Приклади**
Квадратне рівняння називається **зведеним**, якщо перший його коефіцієнт дорівнює одиниці. Зведене квадратне рівняння часто записують так: $\boldsymbol{x^2+px+q=0}$	$x^2-3x+2=0$; $x^2+5x+4=0$ — зведені квадратні рівняння
Зведене квадратне рівняння $x^2+px+q=0$ можна розв'язувати як за формулою повного квадратного рівняння, так і за формулою $\boxed{x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$ де $D_1=\frac{p^2}{4}-q$ називається дискримінантом зведеного квадратного рівняння	$x^2-4x+3=0$ *Розв'язання* $D_1=\left(\frac{4}{2}\right)^2-3=1>0$ $x_{1,2}=2\pm\sqrt{1}$ $x_1=2+1=3$; $x_2=2-1=1$ *Відповідь*: 3; 1

Таблиця 11. **Теорема Вієта**

Теорема Вієта	
Для зведеного рівняння Якщо рівняння $\boldsymbol{x^2+px+q=0}$ має корені x_1 і x_2, то $\boldsymbol{x_1+x_2=-p}$; $\boldsymbol{x_1\cdot x_2=q}$ (перш ніж використовувати теорему Вієта, потрібно впевнитися, що задане рівняння має корені, тобто $D>0$)	Для рівняння $x^2-4x+3=0$ (див. вище) $x_1+x_2=-(-4)=4$, $x_1\cdot x_2=3$
У загальному випадку Якщо рівняння $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ $(a\neq 0)$ має корені x_1 і x_2, то $\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$; $\boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$	Для рівняння $3x^2-5x+2=0$ $D=1>0$. Отже, воно має два корені x_1 і x_2. Тоді $x_1+x_2=\frac{5}{3}$; $x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}$

Обернена теорема до теореми Вієта для зведеного рівняння	
Якщо сума якихось двох чисел x_1 і x_2 дорівнює $(-p)$, а їх добуток дорівнює q, то ці числа є коренями квадратного рівняння $x^2+px+q=0$.	Для рівняння $x^2-5x+6=0$ підберемо два числа x_1 і x_2 так, щоб їх сума дорівнювала 5, а добуток 6. Це числа $x_1=2$; $x_2=3$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта, ці числа є коренями заданого квадратного рівняння
Цю теорему використовують для усного розв'язування деяких квадратних рівнянь	

Таблиця 12. **Розклад квадратного тричлена $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ на множники**

Твердження	Приклад
Якщо $ax^2+bx+c=0$ при $x=x_1$ і $x=x_2$ (тобто рівняння $ax^2+bx+c=0$ має корені x_1 і x_2), то $\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$ Дійсно, $a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-(x-x_2)x+x_1x_2)$. Але за теоремою Вієта $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Тоді одержуємо: $a\left(x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right)=ax^2+bx+c$	Розкласти на множники вираз $3x^2-7x+4$. *Розв'язання* $3x^2-7x+4=0$; $D=7^2-4\cdot3\cdot4=1$; $x_{1,2}=\frac{7+\sqrt{1}}{6}$; $x_1=\frac{4}{3}$; $x_2=1$. Тоді $3x^2-7x+4=3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-1)=$ $=(3x-4)(x-1)$

Таблиця 13. **Рівняння, які зводяться до квадратних**

Заміна змінних
Орієнтир. Якщо до рівняння змінна входить у одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною)
Біквадратне рівняння — це рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де $a\neq 0$

<table>
<tr><th colspan="2">Приклади</th></tr>
<tr><td>

$$x^4+x^2-2=0.$$

Розв'язання

Це біквадратне рівняння.

Заміна $x^2=t$. Тоді $x^4=\left(x^2\right)^2=t^2$.

Одержуємо рівняння

$$t^2+t-2=0;\ D=1^2+8=9;$$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2};\ t_1=1;\ t_2=-2.$$

Виконуємо обернену заміну.

1) При $t=1$ маємо $x^2=1$, тобто $x=\pm1$.

2) При $t=-2$ маємо $x^2=-2$ — рівняння не має коренів.

Відповідь: 1; −1

</td><td>

$$\left(x^2+x\right)^2+x^2+x-6=0.$$

Розв'язання

Заміна $x^2+x=t$. Одержуємо рівняння

$$t^2+t-6=0;\ D=1^2+24=25;$$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2};\ t_1=2;\ t_2=-3.$$

Виконуємо обернену заміну.

1) При $t=2$ маємо $x^2+x=2$, тобто $x^2+x-2=0$. Звідси: $x_1=1;\ x_2=-2$.

2) При $t=-3$ маємо $x^2+x=-3$, тобто $x^2+x+3=0$ — рівняння не має коренів, оскільки $D=-11<0$.

Відповідь: 1; 2

</td></tr>
</table>

Розв'язування вправ

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2-48=0$; б) $2x^2+4=0$; в) $7x^2=0$;
г) $x^2-5=0$; д) $x^2-3x=0$.

План	Розв'язання
Неповні квадратні рівняння *а*—*г* легко зводяться до вигляду $x^2=a$, а в рівнянні *д* зручно винести за дужки x і використати умову рівності добутку нулю (хоча б один із множників дорівнює нулю)	а) $3x^2-48=0$, $3x^2=48$, $x^2=16$, $x=\pm4$; б) $2x^2+4=0$, $2x^2=-4$, $x^2=-2$ — коренів немає; в) $7x^2=0$, $x^2=0$, $x=0$; г) $x^2-5=0$, $x^2=5$, $x=\pm\sqrt{5}$; д) $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$, $x=0$ або $x-3=0$, отже, $x=0$ або $x=3$

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $2x^2-3x-5=0$; б) $x^2-2x+5=0$.

План	Розв'язання
Повні квадратні рівняння $$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$$ розв'язують з використанням загальної формули. При цьому зручно спочатку обчислити дискримінант квадратного тричлена $D=b^2-4ac$ і з'ясувати, чи існують у заданого рівняння корені, а вже потім використовувати формулу $$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$	а) $2x^2-3x-5=0$. $$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 2(-5)=49>0;$$ $$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 7}{4};$$ $$x_1=\frac{5}{2},\ x_2=-1;$$ б) $x^2-2x+5=0$. $$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 5=-16<0,$$ отже, задане рівняння не має коренів

3. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен $-5x^2+7x+6$.

План	Розв'язання
1) Знайдемо корені заданого квадратного тричлена. Для цього прирівняємо його до нуля і розв'яжемо одержане рівняння	$$-5x^2+7x+6=0.$$ $$D=7^2+4\cdot 5\cdot 6=169;$$ $$x_{1,2}=\frac{-7\pm 13}{-10}$$ $$x_1=-\frac{3}{5};\ x_2=2$$
2) Використаємо формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	Тоді $$-5x^2+7x+6=-5\left(x-\left(-\frac{3}{5}\right)\right)(x-2)=$$ $$=-5\left(x+\frac{3}{5}\right)(x-2)$$

4. Виділити квадрат двочлена з квадратного тричлена $2x^2-8x+5$.

План	Розв'язання
Щоб виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена ax^2+bx+c $(a\neq 0)$, спочатку винесемо за дужки коефіцієнт a (коефіцієнт при x^2), а потім у виразі виду x^2+mx+n виділяємо квадрат двочлена (для цього враховуємо, що $mx=2\frac{m}{2}x$)	$2x^2-8x+5=2\left(x^2-4x+\frac{5}{2}\right)=$ $=2\left(\underbrace{x^2-4x+4}+\frac{5}{2}-4\right)=$ $=2\left((x-2)^2-\frac{3}{2}\right)=2(x-2)^2-3$

5. Не розв'язуючи рівняння x^2-7x+5, знайдіть значення $x_1^2+x_2^2$, де x_1 і x_2 — корені заданого квадратного рівняння.

План	Розв'язання
Згадуємо, що за теоремою Вієта ми можемо, не розв'язуючи квадратне рівняння $x^2+px+q=0$ (яке має корені x_1 і x_2), записати суму і добуток його коренів $x_1+x_2=-p$; $x_1\cdot x_2=q$. Якщо ми зможемо записати заданий вираз $x_1^2+x_2^2$ через суму x_1+x_2 і добуток $x_1\cdot x_2$, то, використовуючи теорему Вієта, знайдемо значення шуканого виразу	$x_1^2+x_2^2=\underbrace{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}-2x_1x_2=$ $=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. За теоремою Вієта (маємо право нею користуватися, оскільки для заданого рівняння $D=7^2-4\cdot 5=29>0$): $x_1+x_2=7$, $x_1\cdot x_2=5$. Тоді $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7^2-2\cdot 5=39$. *Відповідь*: 39

6. Два вантажні крани, працюючи разом, можуть розвантажити баржу за 6 год. За скільки годин може розвантажити цю баржу кожний кран, працюючи окремо, якщо другому для цього потрібно на 9 год менше, ніж першому?

План	Розв'язання
У задачах на сумісну роботу часто зручно: 1) увесь обсяг роботи, що виконується, позначити через 1; 2) визначити продуктивність кожного працюючого та їх сумісну продуктивність; 3) скласти рівняння за умовою задачі та розв'язати його. Після розв'язування рівняння слід з'ясувати, чи задовольняють знайдені корені умову задачі	Нехай обсяг усієї роботи дорівнює 1. Позначимо час виконання всієї роботи першим краном через x год, тоді другий виконає всю роботу за $(x-9)$ год. Продуктивність роботи першого крана буде $\frac{1}{x}$, а другого — $\frac{1}{x-9}$. Сумісна продуктивність обох кранів (при їх спільній роботі) дорівнює $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-9}$. Але з умови одержуємо, що сумісна продуктивність дорівнює $\frac{1}{6}$. Одержуємо рівняння $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{6}$. При $x \neq 0$ і $x \neq 9$ це рівняння рівносильне рівнянню $6(x-9)+6x=x(x-9)$. Тобто $x^2-21x+54=0$. Звідси $x_1=3$, $x_2=18$. Але значення $x=3$ не задовольняє умову задачі (якщо перший кран виконає всю роботу за 3 год, то другому потрібно $x-9=3-9=-6$ год, що неможливо). Отже, перший кран виконає всю роботу за $x=18$ год, а другий — за $x-9=18-9=9$ год. *Відповідь*: 18 год, 9 год

Тренувальні вправи

Розв'яжіть рівняння.

1. а) $3x^2=0$; б) $2x^2-18=0$; в) $x^2+10=0$;
г) $x^2-7=0$; д) $x^2+5x=0$; е) $3x^2-6x=0$.

2. а) $x^2-4x-5=0$; б) $x^2-3x+5=0$; в) $2x^2+x-3=0$;
г) $x^2-x-1=0$; д) $x^2-10x+21=0$; е) $3x^2+2x-5=0$.

3. а) $x(5x-3)=3\left(2x-1\frac{1}{3}\right)$; б) $(2x+1)(x-3)=x(4-x)-9$;
в) $(3x-2)(3x+2)=4x(x-1)$; г) $(1-2x)(2x+1)=-2x(3x+1)+2$.

4. а) $(2a+3)^2=(a+1)(a-1)$; б) $5a(a+1)=(3a-2)^2$;
в) $(2p+3)^2-(p-1)^2=25$; г) $3(2m-1)^2=7m^2+12$.

Розв'яжіть рівняння, використовуючи відповідну заміну змінних.

5. а) $x^4+5x^2-36=0$; б) $x^4-6x^2+8=0$; в) $2x^4+3x^2+1=0$;
г) $x^4-8x^2-20=0$; д) $x^4-5x^2+6=0$; е) $x^4-8x^2-9=0$.

6. а) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$; б) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$;
в) $4(x^2-x)^2+9(x^2-x)+2=0$; г) $(2x^2-x+1)^2-2(2x^2-x+1)+1=0$.

7. а) $2\cdot\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2-7\cdot\frac{x+3}{x-1}+5=0$; б) $4\cdot\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^2+5\cdot\frac{x+1}{x^2}+1=0$;
в) $\left(\frac{2-x^2}{x}\right)^2-2\cdot\frac{x^2-2}{x}+1=0$; г) $3\cdot\left(\frac{x+3}{1-3x}\right)^2+10\cdot\frac{x+3}{1-3x}+3=0$.

8. а) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$; б) $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$;
в) $\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-\left(x+\frac{2}{x}\right)-8=0$; г) $\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{x}\right)-12=0$.

9. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:
а) $15x^2+x-6=0$; б) $5y^2+8y+3{,}2=0$; в) $-12m^2+5m+3=0$.

10. Скоротіть дріб: а) $\frac{x^2-5x-6}{x^2-1}$; б) $\frac{6x^2+13x-5}{12x-4}$; в) $\frac{4a^2-9}{6a^2-5a-6}$.

11. Рівняння $6x^2+x-2=0$ має корені x_1 і x_2. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; в) $(x_1-x_2)^2$; г) $x_1^3+x_2^3$.

12. Число 5 є коренем рівняння $x^2+px-30=0$. Знайдіть другий корінь рівняння і коефіцієнт p.

13. Басейн наповнюється водою за допомогою двох труб. Коли перша труба пропрацювала 7 год, включили другу трубу. Разом вони пропрацювали 2 год до повного наповнення басейну. За скільки годин може наповнити басейн кожна труба, працюючи окремо, якщо першій потрібно на це на 4 год більше, ніж другій?

14. Із селища в місто, до якого 150 км, відправилися одночасно легковий і вантажний автомобілі. Швидкість легкового автомобіля була на 10 км/год більша від швидкості вантажного, і тому він витратив на весь шлях на $\frac{1}{2}$ год менше, ніж вантажний. Знайдіть швидкість вантажного автомобіля.

15. Мотоцикліст проїхав від села до озера 60 км. На зворотному шляху він зменшив швидкість на 10 км/год і тому витратив часу на 0,3 год більше. Скільки часу витратив мотоцикліст на зворотний шлях?

16. На 80 км шляху велосипедист витрачає на 2 год більше, ніж мотоцикліст, оскільки його швидкість на 20 км/год менша. Знайдіть швидкість велосипедиста.

17. З першої ділянки зібрали 80 ц проса, а з другої — 90 ц, хоча площа другої ділянки є на 2 га меншою. З кожного гектара другої ділянки зібрали на 5 ц більше, ніж з кожного гектара першої. Яка врожайність проса на кожній ділянці?

18. Катер пройшов за течією річки 36 км і проти течії 48 км, витративши на весь шлях 6 год. Яка швидкість катера в стоячій воді, якщо швидкість течії 3 км/год?

19. Пліт пропливає за течією річки 60 км на 5 год швидше, ніж таку саму відстань проходить моторний човен проти течії. Знайдіть

швидкість човна за течією, якщо його швидкість у стоячій воді 10 км/год.

20. Моторний човен пройшов за течією річки 70 км. За той самий час він може пройти проти течії 30 км. Знайдіть швидкість течії, якщо швидкість човна в стоячій воді 10 км/год.

21. Два слюсарі виконали завдання за 12 год. Якби половину завдання виконав перший слюсар, а решту другий, то першому знадобилося б часу на 5 год більше, ніж другому. За скільки годин кожний із них міг би виконати завдання?

22. З посудини, повністю заповненої спиртом, відлили 6 л. Потім долили в неї стільки ж літрів води і знову відлили 5 л суміші. У посудині залишилася суміш, яка містить 80 % спирту. Знайдіть місткість посудини.

23. Пройшовши половину шляху, потяг збільшив швидкість на 30 км/год. З якою швидкістю потяг пройшов першу половину шляху, якщо його середня швидкість на всьому шляху виявилася рівною 72 км/год?

24. У розчин, що містить 40 г солі, додали 100 г води. Унаслідок цього концентрація солі зменшилася на 2 % . Знайдіть початкову масу розчину.

25. З одного пункту виїхали одночасно в одному й тому самому напрямі два автомобілі: перший — зі швидкістю 60 км/год, а другий — зі швидкістю 80 км/год. Через 0,5 год з того самого пункту вслід за ними виїхав третій автомобіль. Він догнав другий автомобіль через $1\frac{1}{4}$ год після того, як обігнав перший. Знайдіть швидкість третього автомобіля.

Тренувальні тести для підготовки до контрольної роботи та тематичного оцінювання

Обведіть літери, що відповідають твердженням, які ви вважаєте правильними, та закресліть літери, що відповідають твердженням, які ви вважаєте неправильними.

Частина 1

1 рівень

1. Знаючи, що рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ є квадратним, виберіть, яке з наведених нижче рівнянь є квадратним.
   А. $5x+2=0$. **Б.** $2x^3+4x^2+x+1=0$.
   В. $3x^2-x+2=0$. **Г.** $x^4+x^2-x=0$.
2. Знаючи, що рівняння $x^2=a$ має корені $x=\pm\sqrt{a}$ тільки при $a\geqslant 0$, виберіть правильне твердження.
   А. Рівняння $x^2=-9$ має корені.
   Б. Рівняння $x^2=9$ не має коренів.
   В. Рівняння $x^2=9$ має тільки один корінь.
   Г. Рівняння $x^2=9$ має два корені: 3 і −3.
3. Знаючи, що дискримінантом квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ є вираз $D=b^2-4ac$, виберіть правильне твердження.
   А. Для рівняння $3x^2-x-1=0$ $a=-1$, $b=2$, $c=3$.
   Б. Для рівняння $3x^2-2x-1=0$ дискримінант можна обчислити за формулою $D=(-2)^2-4\cdot 3\cdot 1$.
   В. Для рівняння $3x^2-2x-1=0$ дискримінант дорівнює 8.
   Г. Для рівняння $3x^2-2x-1=0$ дискримінант дорівнює 16.

2 рівень

4. Задано рівняння $2x^2 - 8 = 0$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Задане рівняння є квадратним рівнянням.

Б. Задане рівняння можна привести до виду $x^2 = 4$.

В. Задане рівняння має тільки один корінь $x = 2$.

Г. Задане рівняння має два корені $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

5. Задано квадратне рівняння $3x^2 - 9x = 0$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Якщо в лівій частині заданого рівняння винести $3x$ за дужки, то одержимо рівняння $3x(x+3) = 0$.

Б. Добуток $3x(x-3)$ дорівнює нулю, якщо $3x = 0$ або $x - 3 = 0$.

В. Задане рівняння має два корені: $x = 0$ і $x = 3$.

Г. Рівняння виду $ax^2 + bx = 0$ завжди має корінь $x = 0$.

6. Задано квадратне рівняння $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Знаючи, що корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ можна обчислити за формулою $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$, позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Для заданого рівняння $a = -3$, $b = 5$, $c = 2$.

Б. Дискримінант заданого рівняння можна обчислити за формулою $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)$.

В. Корені заданого рівняння можна обчислити за формулою $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2}$.

Г. Задане рівняння має два корені: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

3 рівень

7. Задано рівняння $(x-3)(x+3)=x-9$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

   А. Якщо розкрити дужки в лівій частині рівняння і перенести всі члени рівняння в ліву частину, то одержимо рівняння $x^2-x=0$.

   Б. Задане рівняння можна звести до рівняння $x(x+1)=0$.

   В. Усі корені заданого рівняння задовольняють хоча б одне з рівнянь $x=0$ або $x-1=0$.

   Г. Задане рівняння має тільки один корінь.

8. Задано рівняння $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{x-2}=\frac{2x+8}{x^2-4}$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

   А. Рівняння має зміст тільки при значеннях $x\neq\pm2$.

   Б. Якщо всі члени заданого рівняння перенести в ліву частину і звести дроби до спільного знаменника, то одержимо рівняння $\frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-2)}=0$.

   В. Рівняння $x^2-x-2=0$ має корені $x_1=-1$, $x_2=2$.

   Г. Усі корені рівняння $x^2-x-2=0$ є коренями заданого рівняння.

9. Задано рівняння $3(x^2+1)=2x^2+x(5-x)$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

   А. Задане рівняння можна звести до виду $2x^2-5x-3=0$.

   Б. Задане рівняння має два різні корені.

   В. Корені заданого рівняння можна обчислити за формулою $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}$.

   Г. Коренями заданого рівняння є числа 1 і $\frac{3}{2}$.

4 рівень

10. Задано рівняння $x^2-\frac{5x^2}{|x|}+6=0$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Задане рівняння можна записати так: $|x|^2-\frac{5|x|^2}{|x|}+6=0$.

Б. Якщо в заданому рівнянні виконати заміну $|x|=t$, то одержимо квадратне рівняння $t^2+5t+6=0$.

В. Усі корені заданого рівняння задовольняють хоча б одне з рівнянь $|x|=2$ або $|x|=3$.

Г. Задане рівняння має тільки два корені.

11. Задано рівняння $(2x^2+3)^2-8(2x^2+3)+15=0$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Якщо в заданому рівнянні виконати заміну $2x^2+3=t$, то одержимо квадратне рівняння $t^2+8t+15=0$.

Б. Рівняння $t^2-8t+15=0$ має корені $t_1=3$, $t_2=5$.

В. Усі корені заданого рівняння задовольняють хоча б одне з рівнянь $2x^2+3=3$ або $2x^2+3=5$.

Г. Задане рівняння має тільки два корені.

12. Задано рівняння $x^2-(4a+1)x+4a=0$, де x — змінна, a — деяке число. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Дискримінант заданого квадратного рівняння дорівнює $(4a-1)^2$.

Б. Корені заданого рівняння можна обчислити за формулою $x_{1,2}=\frac{4a+1\pm(4a-1)}{2}$.

В. При $a=\frac{1}{4}$ задане рівняння має два різні корені.

Г. При будь-яких значеннях a коренями заданого рівняння є числа $4a$ і 1.

Частина 2

1 рівень

1. Зведеним квадратним рівнянням називають таке квадратне рівняння, у якого коефіцієнт при x^2 дорівнює одиниці. Виберіть правильне твердження.

   А. Рівняння $5x^2-3x-4=0$ є зведеним квадратним рівнянням.

   Б. Рівняння $x^2-5x+3=0$ є зведеним квадратним рівнянням.

   В. Рівняння $2x^2+x-7=0$ є зведеним квадратним рівнянням.

   Г. Рівняння $3x^2-x-6=0$ є зведеним квадратним рівнянням.

2. Задано квадратне рівняння $x^2-5x+6=0$, яке має корені $x_1=2$, $x_2=3$. Виберіть правильне твердження.

   А. Сума коренів заданого рівняння дорівнює коефіцієнту при x.

   Б. Сума коренів заданого рівняння дорівнює коефіцієнту при x, взятому з протилежним знаком.

   В. Добуток коренів заданого рівняння дорівнює коефіцієнту при x.

   Г. Добуток коренів заданого рівняння дорівнює вільному члену, взятому з протилежним знаком.

3. Задано квадратне рівняння $x^2-3x-4=0$, яке має два корені x_1 і x_2. Знаючи, що за теоремою Вієта для квадратного рівняння $x^2+px+q=0$ сума коренів $x_1+x_2=-p$, а добуток коренів $x_1x_2=q$, виберіть правильне твердження.

   А. $x_1+x_2=4$. **Б.** $x_1+x_2=3$. **В.** $x_1x_2=-3$. **Г.** $x_1x_2=4$.

2 рівень

4. Відомо, що число 5 є коренем квадратного рівняння $x^2+px+35=0$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

   А. За теоремою Вієта для заданого рівняння добуток коренів дорівнює 35.

   Б. Другий корінь заданого рівняння дорівнює (-7).

В. За теоремою Вієта для заданого рівняння сума його коренів $5+7=-p$.

Г. Рівняння $x^2+px+35=0$ має вид $x^2-12x+35=0$.

5. Задано квадратне рівняння $x^2-9z-4=0$, яке має два різні корені. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Дискримінант заданого рівняння від'ємний.

Б. За теоремою Вієта добуток коренів заданого рівняння дорівнює (-4).

В. У заданого рівняння один корінь додатний, а другий — від'ємний.

Г. У заданого рівняння обидва корені додатні.

6. Довжина прямокутника на 2 см більша за його ширину, а площа прямокутника дорівнює 15 см². Ширину прямокутника позначили через x. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Довжина прямокутника дорівнює $x-2$.

Б. Площу прямокутника можна обчислити за формулою $x(x-2)$.

В. За умовою можна скласти рівняння $x(x+2)=15$.

Г. Рівняння, складене за умовою, можна записати так: $x^2+2x+15=0$.

3 рівень

7. Відомо, що x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2+4x-10=0$. Хочуть знайти значення виразу $(x_1)^2+(x_2)^2$, не розв'язуючи задане рівняння. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Для заданого рівняння $x_1+x_2=-4$.

Б. Для заданого рівняння $x_1x_2=10$.

В. $(x_1)^2+(x_2)^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

Г. $(x_1)^2+(x_2)^2=-4$.

8. Задано квадратне рівняння $x^2+2x-5=0$, яке має корені x_1 і x_2. Хочуть, не розв'язуючи задане рівняння, скласти квадратне рівняння $x^2+px+q=0$, корені якого дорівнюють $2x_1$ і $2x_2$. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

   А. За теоремою Вієта для коренів рівняння $x^2+2x-5=0$ виконуються рівності: $x_1+x_2=2$ та $x_1x_2=5$.

   Б. За теоремою Вієта для коренів шуканого рівняння $x^2+px+q=0$ виконуються рівності: $2x_1+2x_2=-p$ і $4x_1x_2=q$.

   В. З умови випливає, що $p=-2(x_1+x_2)$, $q=4(x_1x_2)$.

   Г. Шукане рівняння $x^2+px+q=0$ має вигляд $x^2+4x-20=0$.

9. Турист проплив на байдарці 3 км по озеру і 4 км за течією річки за той самий час, який потрібний йому, щоб проплисти 4 км проти течії. Відомо, що швидкість течії дорівнює 2 км/год. Швидкість туриста при русі по озеру позначили через x. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

   А. Швидкість руху туриста за течією дорівнює $(x-2)$ км/год, а проти течії — $(x+2)$ км/год.

   Б. За умовою можна скласти рівняння $\frac{3}{x}+\frac{4}{x+2}=\frac{4}{x-2}$.

   В. З умови випливає, що x задовольняє рівняння $3x^2-16x-12=0$.

   Г. Обидва корені рівняння, складеного за умовою, задовольняють цю умову.

4 рівень

10. Шукають такі значення a, при яких різниця коренів рівняння $x^2-4x+a=0$ дорівнює 2. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Якщо корені заданого рівняння позначити x_1 і x_2, то, враховуючи теорему Вієта, за умовою можна скласти таку систему рівнянь: $\begin{cases} x_1+x_2=4, \\ x_1-x_2=2. \end{cases}$

Б. Якщо корені заданого рівняння позначити x_1 і x_2, то, враховуючи теорему Вієта, за умовою можна скласти таку систему рівнянь: $\begin{cases} x_1+x_2=4, \\ x_2-x_1=2. \end{cases}$

В. За теоремою Вієта для заданого рівняння $x_1x_2=-a$.

Г. Умову задовольняє тільки одне значення $a=3$.

11. Задано квадратне рівняння $x^2-x-3=0$, яке має корені x_1 і x_2. Хочуть, не розв'язуючи задане рівняння, скласти квадратне рівняння $x^2+px+q=0$, корені якого дорівнюють x_1-3 і x_2-3. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. За теоремою Вієта для коренів рівняння $x^2-x-3=0$ виконуються рівності: $x_1+x_2=-1$ і $x_1x_2=3$.

Б. За теоремою Вієта для коренів шуканого рівняння $x^2+px+q=0$ виконуються рівності: $(x_1-3)+(x_2-3)=-p$ і $(x_1-3)(x_2-3)=q$.

В. З умови випливає, що $p=6-(x_1+x_2)$, $q=(x_1x_2)-3(x_1+x_2)+9$.

Г. Шукане рівняння $x^2+px+q=0$ має вигляд $x^2+5x+3=0$.

12. До розчину солі у воді, який містить 12 кг води, додали ще 5 кг води, після чого концентрація розчину зменшилася на 5 %. Кількість солі в розчині позначили через x кг. Позначте, які з наведених чотирьох тверджень правильні, а які — неправильні.

А. Частка солі у розчині після доливання води дорівнює $\dfrac{x}{x+17}$.

Б. За умовою можна скласти рівняння $\frac{x}{x+12}-\frac{x}{x+17}=\frac{1}{20}$.

В. Рівняння, складене за умовою, має ті ж самі корені, що і рівняння $x^2+71x+240=0$.

Г. У розчині може міститися тільки 3 кг солі*.

Контрольна робота

В-І	7 балів	В-ІІ
1. Розв'яжіть рівняння *(3 бали)*:		
а) $2x^2-3x=0$; б) $x^2-10=0$; в) $-3x^2+5x+8$		а) $3x^2+5x=0$; б) $x^2-7=0$; в) $-2x^2-5x+7=0$
2. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен *(2 бали)*:		
$3x^2-x-10=0$		$3x^2+x+6=0$
3. Розв'яжіть задачу *(2 бали)*:		
Не розв'язуючи рівняння x^2-9x+3, знайдіть значення $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$, де x_1 і x_2 — корені заданого квадратного рівняння.		Не розв'язуючи рівняння x^2-5x+2, знайдіть значення $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, де x_1 і x_2 — корені заданого квадратного рівняння.
В-ІІІ	**9 балів**	**В-IV**
1. Розв'яжіть рівняння *(2 бали)*:		
а) $7x+5x^2=0$; б) $2x^2+4x-1=0$		а) $-3x+4x^2=0$; б) $3x^2-6x+2=0$
2. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен *(2 бали)*:		
$-3x^2+2x+5=0$		$-5x^2-x+6=0$
3. Розв'яжіть рівняння *(3 бали)*:		
$2x^4-5x^2+3=0$		$4x^4-9x^2+5=0$

* Врахуйте, що при кімнатній температурі в 1 кг води можна розчинити не більше 0,4 кг солі.

<table>
<tr><td colspan="2">4. Розв'яжіть задачу (2 бали):</td></tr>
<tr><td>Площа прямокутника дорівнює 18 см². Одна з його сторін більша за другу на 3 см. Знайдіть сторони прямокутника.</td><td>Площа прямокутника дорівнює 15 см². Одна з його сторін менша за другу на 2 см. Знайдіть сторони прямокутника.</td></tr>
<tr><td>В-V</td><td>12 балів   В-VI</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Розв'яжіть рівняння (3 бали):</td></tr>
<tr><td>$\left(x^2+5x\right)^2-2\left(x^2+5x\right)-24=0$</td><td>$\left(x^2-x\right)^2-3\left(x^2-x\right)+2=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Розв'яжіть задачу (3 бали):</td></tr>
<tr><td>Не розв'язуючи рівняння $3x^2-9x-1$, знайдіть значення виразу $x_1^2+x_2^2-x_1x_2$, де x_1 і x_2 — корені заданого квадратного рівняння</td><td>Не розв'язуючи рівняння $2x^2-6x-3$, знайдіть значення виразу $x_1^2+x_2^2+x_1x_2$, де x_1 і x_2 — корені заданого квадратного рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Розв'яжіть задачу (3 бали):</td></tr>
<tr><td>Із селища до міста, до якого 150 км, виїхали одночасно легковий і вантажний автомобілі. Швидкість легкового автомобіля була на 10 км/год більша від швидкості вантажного, і тому на весь шлях він витратив на $\frac{1}{2}$ год менше, ніж вантажний. Знайдіть швидкість вантажного автомобіля</td><td>Дві швачки, працюючи разом, виконують одержане замовлення за 6 днів. За скільки днів кожна з них, працюючи окремо, може виконати це замовлення, якщо одній потрібно для цього на 5 днів більше, ніж другій?</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Розв'яжіть рівняння відносно змінної x (3 бали):</td></tr>
<tr><td>$(a-1)x^2+2x-4a=0$</td><td>$(a+3)x^2-6x-4a=0$</td></tr>
</table>

Для майбутніх абітурієнтів

Квадратні рівняння з параметрами

Нагадаємо, що *рівняння з параметрами можна розв'язувати так само, як звичайні рівняння, але тільки до того часу, поки кожне потрібне перетворення можна виконати однозначно. Якщо ж якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язання потрібно розбити на декілька випадків.*

Слід також враховувати, що рівняння виду $ax^2+bx+c=0$ називається квадратним тільки при $a\neq 0$. Тому якщо в такого типу рівнянні не сказано, що $a\neq 0$, то доводиться розглядати два випадки: 1) $a=0$ — одержуємо лінійне рівняння, 2) $a\neq 0$ — одержуємо квадратне рівняння.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $ax^2-x-a+1=0$, де x — змінна.

Розв'язання	Пояснення
1) При $a=0$ одержуємо рівняння $-x+1=0$. Тоді $x=1$	При $a=0$ задане рівняння не є квадратним. Підставляємо $a=0$ в задане рівняння і розв'язуємо одержане рівняння.
2) При $a\neq 0$ — одержуємо квадратне рівняння. $D=1-4a(-a+1)=$ $=4a^2-4a+1=(2a-1)^2$; $x_{1,2}=\dfrac{1\pm(2a-1)}{2a}$; $x_1=1$, $x_2=\dfrac{2-2a}{2a}=\dfrac{1-a}{a}$	При $a\neq 0$ маємо квадратне рівняння. Знаходимо його дискримінант і використовуємо формулу коренів квадратного рівняння. При обчисленні коренів доцільно записати загальну формулу для двох коренів $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{(2a-1)^2}}{2a}$. Враховуючи, що $\sqrt{(2a-1)^2}=\lvert 2a-1\rvert$, одержуємо $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\lvert 2a-1\rvert}{2a}$. Але пара чисел $\pm\lvert b\rvert$ збігається з парою чисел $\pm b$ (хіба що не збігається порядок цих чисел), тому у формулі коренів знак модуля можна не записувати
Відповідь: 1) при $a=0$ $x=1$; 2) при $a\neq 0$ $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1-a}{a}$.	

Нагадаємо, що *для дробово-раціональних рівнянь* слід також враховувати, що всі рівносильні перетворення рівнянь виконуються на області допустимих значень (ОДЗ) заданого рівняння, тому, перш ніж записати відповідь, *обов'язково слід врахувати ОДЗ заданого рівняння*.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $ax+1=\frac{4a+2}{x}$, де x — змінна.

Розв'язання	Пояснення
ОДЗ: $x \neq 0$	Задані вирази існують тоді і тільки тоді, коли знаменник дробу не дорівнює нулю
$ax^2+x-(4a+2)=0$	Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз x — спільний знаменник дробів і одержимо ціле рівняння, яке за умови $x \neq 0$ (тобто на ОДЗ заданого рівняння) рівносильне заданому
1) При $a=0$ одержуємо рівняння $x-2=0$. Тоді $x=2$	При $a=0$ задане рівняння не є квадратним. Підставляємо $a=0$ в задане рівняння і розв'язуємо одержане рівняння
2) При $a \neq 0$ одержуємо квадратне рівняння. $D=1+4a(4a+2)=$ $=16a^2+8a+1=(4a+1)^2$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm(4a+1)}{2a}$. Тоді $x_1=2$, $x_2=-\frac{2a+1}{a}$. Враховуємо ОДЗ: $x_1=2$ — корінь (входить до ОДЗ) при будь-яких значеннях a.	При $a \neq 0$ маємо квадратне рівняння. Знаходимо його дискримінант і використовуємо формулу коренів квадратного рівняння. При обчисленні коренів доцільно записати загальну формулу для двох коренів (тільки тоді у формулі коренів знак модуля можна не записувати — див. пояснення в прикладі 1). Перш ніж записувати відповідь, обов'язково слід з'ясувати, чи входять одержані значення до ОДЗ заданого рівняння.

Розв'язання	Пояснення
Оскільки $x_2=0$ при $a=-\frac{1}{2}$, то при $a=-\frac{1}{2}$ $x_2=0$ не є коренем заданого рівняння (але коренем є $x_1=2$), а при $a\neq-\frac{1}{2}$ значення $x_2=-\frac{2a+1}{a}$ є коренем	Для кореня x_2 можна спочатку з'ясувати, коли він попадає в заборонені значення $(x=0)$, а потім дати відповідь для знайдених значень a $\left(a=-\frac{1}{2}\right)$ і для всіх інших значень a (та ще й врахувати, що при $a=0$ одержали такий же розв'язок, як і при $a=-1$)
Відповідь: 1) при $a=0$ або $a=-\frac{1}{2}$ $x=2$; 2) при $a\neq 0$ і $a\neq-\frac{1}{2}$ $x_1=2$, $x_2=-\frac{2a+1}{a}$.	

Приклад 3. Знайдіть усі значення параметра a, при яких сума коренів рівняння $x^2-\left(a^2+3a\right)x+5-a=0$ дорівнює 4.

Розв'язання	Пояснення
Якщо задане квадратне рівняння має корені x_1 і x_2, то за теоремою Вієта $$x_1+x_2=a^2+3a,$$ але за умовою $x_1+x_2=4$. Отже, $a^2+3a=4$, $a^2+3a-4=0$. Тоді $a_1=1$, $a_2=-4$. Перевіримо, чи дійсно при знайдених значеннях a рівняння має корені	Щоб задане квадратне рівняння мало корені, потрібно, щоб його дискримінант був невід'ємним: $D=\left(a^2+3a\right)^2-4(5-a)\geqslant 0$. Тоді $x_{1,2}=\frac{a^2+3a\pm\sqrt{\left(a^2+3a\right)^2-4(5-a)}}{2}$ і за умовою $x_1+x_2=4$. Але можна не записувати всі ці громіздкі формули, а просто скористатися теоремою Вієта: якщо рівняння $x^2+px+q=0$ має корені x_1 і x_2, то $x_1+x_2=-p$; $x_1\cdot x_2=q$

Розв'язання	Пояснення
При $a = 1$ одержуємо рівняння $x^2 - 4x - 4 = 0$, у якого $D = 32 > 0$ і яке має корені. При $a = -4$ одержуємо рівняння $x^2 - 4x + 9 = 0$, у якого $D = -20 < 0$ і яке не має коренів	Для того щоб мати право використати теорему Вієта, потрібно впевнитися, що задане рівняння має корені, тобто $D \geqslant 0$
Відповідь: $a = 1$.	

Тренувальні вправи

Розв'яжіть рівняння відносно змінної x.

1. а) $x^2 - ax + 5a - 25 = 0$; б) $ax^2 - x - 9a + 3 = 0$;
   в) $(a-2)x^2 + 2x - a = 0$; г) $ax^2 - 2x - 4a + 4 = 0$.

2. а) $(a+1)x^2 - 2x - 4a = 0$; б) $ax^2 - x - a - 1 = 0$;
   в) $(a+2)x^2 + 4x - 4a = 0$; г) $ax^2 - x - 9a - 3 = 0$.

3. а) $ax + 1 = \dfrac{9a+3}{x}$; б) $ax - 1 = \dfrac{4a+2}{x}$;
   в) $ax + 1 = \dfrac{6a+2}{x-1}$; г) $2ax - 1 = \dfrac{4a-1}{x-1}$.

4. а) $3ax - 5 = \dfrac{9a-5}{x-2}$; б) $ax + 3 = \dfrac{9a+9}{x}$;
   в) $ax - 1 = \dfrac{3a-3}{x+2}$; г) $ax + 2 = \dfrac{16a+8}{x}$.

5. Знайдіть усі значення параметра a, при яких має тільки один корінь задане рівняння:
   а) $ax^2 - 6x - 2 = 0$;
   б) $(a+2)x^2 + (a+5)x - 1 = 0$;
   в) $(a+1)x^2 + (a^2 + a)x + a + 1 = 0$.

Вказівка. Врахувати, що задане рівняння може мати єдиний корінь тільки в двох випадках: 1) якщо це буде лінійне рівняння; 2) якщо це буде квадратне рівняння, у якого $D = 0$.

6. Число 3 є коренем рівняння $x^2-4x+a=0$. Знайдіть другий корінь рівняння і коефіцієнт a.

7. Число (-2) є коренем рівняння $x^2+2ax+8=0$. Знайдіть значення a і другий корінь рівняння.

8. Корені рівняння $x^2+px+q=0$ дорівнюють його коефіцієнтам p і q. Знайдіть p і q.

9. Знайдіть усі значення параметра a, при яких сума коренів рівняння $x^2+(a^2+2a-3)x+a=0$ дорівнює 0.

10. Знайдіть усі цілі значення a, при яких має цілі корені рівняння: а) $x^2+ax-6=0$; б) $x^2+ax+12=0$; в) $x^2+ax-8=0$.

Вказівка. а) Врахувати, що за теоремою Вієта добуток цілих коренів $x_1x_2=-6$, а число -6 можна подати у вигляді добутку двох цілих чисел тільки чотирма способами: $-6=-1\cdot 6=1\cdot(-6)=-2\cdot 3=2\cdot(-3)$. Також слід пам'ятати, що теорему Вієта можна застосовувати тільки тоді, коли у заданого рівняння є дійсні корені $(D\geqslant 0)$.

11. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2-ax+8=0$ задовольняють умову $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-\frac{5}{2}$. Знайдіть значення a.

12. Знайдіть усі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння $x^2+ax-2a-2=0$ дорівнює 9.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ
(з курсу математики 5–6 класів та алгебри 7 класу)

Таблиця 1. **Числові множини**

Позначення	Назва	Зміст	Приклад
N	Множина натуральних чисел	Числа, які використовують для лічби	1; 2; 3; 4; 13; 1001
Z	Множина цілих чисел	Натуральні числа, числа їм протилежні (цілі від'ємні) та число нуль	−25; 0; 13; 2002
Q	Множина раціональних чисел	Цілі й дробові числа. Раціональні числа можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне число	$-5;\ 2{,}7;\ -\frac{2}{7};\ 0;\ 2;\ 2\frac{1}{3}$

Таблиця 2. **Дії над числами**

Дії	Запис	Назви компонентів
Додавання	$a+b=c$	a і b — доданки, c — сума
Віднімання	$a-b=c$	a — зменшуване, b — від'ємник, c — різниця
Множення	$a\cdot b=c$ або $a\times b=c$	a і b — множники, c — добуток
Ділення	$a:b=c$ або $\frac{a}{b}=c$	a — ділене, b — дільник, c — частка

Таблиця 3. **Закони додавання і множення**

Додавання	Множення	Назва
$a + b = b + a$	$ab = ba$	Переставні закони
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$	Сполучні закони
$(a + b)c = ac + bc$		Розподільний закон
Якщо $a = b$ і c — будь-яке число, то $a + c = b + c$	Якщо $a = b$ і $c \neq 0$, то $ac = bc$	

Таблиця 4. **Означення і властивості віднімання та ділення**

Символічний запис	Назва	Приклад
1. Якщо $a - b = c$, то $a = b + c$	Означення різниці	$8 - 5 = 3$, отже, $8 = 5 + 3$
2. $a - b = a + (-b)$	Заміна віднімання додаванням	$8 - 5 = 8 + (-5)$
3. $a + (b - c) = a + b - c$: *якщо перед дужками стоїть знак «+», то при розкритті дужок знаки не змінюються*	Правила розкриття дужок	$5 + (7 - 2) = 5 + 7 - 2$
4. $a - (b - c) = a - b + c$: *якщо перед дужками стоїть знак «−», то при розкритті дужок знаки змінюються на протилежні*		$5 - (7 - 2) = 5 - 7 + 2$
5. Якщо $a : b = c$, то $a = bc$, $(b \neq 0)$	Означення частки	$15 : 5 = 3$, отже, $15 = 5 \cdot 3$

Таблиця 5. **Відсотки**

<table>
<tr><th colspan="2">Означення</th></tr>
<tr><td colspan="2">Відсотком називається сота частина цілого (яке береться за одиницю):
$$1\%\ \text{від числа}\ a = \frac{1}{100}a$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Основні задачі на відсотки</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Знаходження відсотка від числа</td></tr>
<tr><td>$p\%$ від числа a дорівнює
$$\frac{p}{100}a$$</td><td>Приклад. Знайти 7% від числа 300
Розв'язання. $\frac{7}{100}\cdot 300 = 21$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Знаходження числа за заданим значенням його відсотка</td></tr>
<tr><td>Якщо $p\%$ від якогось числа дорівнює b, то все число дорівнює
$$b : \frac{p}{100} = \frac{b\cdot 100}{p}$$</td><td>Приклад. Знайти число, 30% якого становить 24.
Розв'язання. Шукане число x є розв'язком рівняння $\frac{30}{100}\cdot x = 24$,
звідки $x = 24 : \frac{30}{100} = 80$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Знаходження відсоткового відношення двох чисел</td></tr>
<tr><td>Число a становить $\frac{a}{b}\cdot 100\ \%$ від числа b</td><td>Приклад. Скільки відсотків становить число 26 від числа 65?
Розв'язання. Шукане число відсотків x задовольняє рівняння
$$\frac{x}{100}\cdot 65 = 26,$$
звідки $x = \frac{26}{65}\cdot 100 = 40\ (\%)$</td></tr>
</table>

Таблиця 6. **Пропорції**

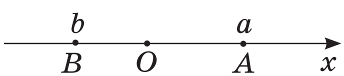
Означення	
Пропорцією називається рівність двох числових відношень (відношенням називають частку від ділення одного числа на інше)	
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, або $a:b=c:d$ $(a, b, c, d \neq 0)$	a і d — крайні члени пропорції; b і c — середні члени пропорції. Кожний член пропорції називається четвертим пропорційним відносно інших трьох
Властивості	
1. $ad=bc$	*Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів*
2. $a=\frac{bc}{d}$; $d=\frac{bc}{a}$	Кожний крайній член пропорції дорівнює добутку її середніх членів, поділеному на інший крайній член
3. $b=\frac{ad}{c}$; $c=\frac{ad}{b}$	Кожний середній член пропорції дорівнює добутку її крайніх членів, поділеному на інший середній член
4. Одночасно справджуються такі пропорції: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{c}=\frac{c}{a}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$	У кожній пропорції можна поміняти місцями або лише середні члени, або лише крайні, або і ті, й інші одночасно
Похідні пропорції	
Якщо $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ — правильна пропорція, то правильними є і такі пропорції: $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$; $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$; $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$; $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$; $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$	

Таблиця 7. **Умови рівності нулю добутку і частки**

Символічний запис	Формулювання
1. $ab = 0$, якщо $a = 0$ або $b = 0$	Добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю
2. $\frac{a}{b} = 0$, якщо $a = 0$ $(b \neq 0)$	Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю (а знаменник не дорівнює нулю)

Таблиця 8. **Модуль числа**

Означення	Приклади
Модулем додатного числа називається само це число, модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне, модуль нуля дорівнює нулю: $$\lvert a\rvert = \begin{cases} a \text{ при } a > 0 \\ 0 \text{ при } a = 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases} =$$ $$= \begin{cases} a \text{ при } a > 0 \\ -a \text{ при } a \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0 \\ -a \text{ при } a \leqslant 0 \end{cases}$$	$\lvert -3\rvert = 3$; $\lvert 5\rvert = 5$; $\lvert 0\rvert = 0$; $\lvert a^4\rvert = a^4$ (оскільки $a^4 \geqslant 0$)

Геометричний зміст модуля	
	*На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число*
$\lvert a\rvert = OA$; $\lvert b\rvert = OB$; $\lvert a-b\rvert = AB$	Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій

Властивості	Формулювання	Приклади
1. $\lvert a\rvert \geqslant 0$	Модуль будь-якого числа — невід'ємне число	$\lvert -5\rvert \geqslant 0$
2. $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	Модулі протилежних чисел рівні	$\lvert -13\rvert = \lvert 13\rvert$
3. $a \leqslant \lvert a\rvert$	Число не перевищує свого модуля	$-8 \leqslant \lvert -8\rvert = 8$
4. $\lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	Модуль добутку дорівнює добутку модулей множників	$\lvert (-2)\cdot(-3)\rvert = \lvert -2\rvert \cdot \lvert -3\rvert$
5. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ $(b \neq 0)$	Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)	$\left\lvert \frac{2}{3} \right\rvert = \frac{\lvert 2\rvert}{\lvert 3\rvert} = \frac{2}{3}$, $\left\lvert \frac{-7}{-12} \right\rvert = \frac{\lvert -7\rvert}{\lvert -12\rvert} = \frac{7}{12}$
6. $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$; $\lvert a^2\rvert = a^2$; $\lvert a^{2k}\rvert = a^{2k}$	Модуль степеня числа дорівнює тому самому степеню модуля даного числа. Модуль парного степеня будь-якого числа дорівнює тому самому степеню даного числа	$\lvert (-2)^3\rvert = \lvert -2\rvert^3 = 2^3 = 8$; $\lvert (-5)^2\rvert = \lvert -5\rvert^2 = 5^2 = 25$; $\lvert (-2)^4\rvert = \lvert -2\rvert^4 = 2^4 = 16$
7. $\lvert a+b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	Модуль суми не перевищує суми модулів доданків	
8. $\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \rvert \leqslant \lvert a \pm b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$		

Таблиця 9. **Дії над числами з однаковими та різними знаками**

Правило	Приклад
Додавання і віднімання	
При додаванні чисел з однаковими знаками їх модулі додаються, а перед сумою ставиться їх спільний знак	$15+23=38$, $-18+(-11)=$ $=-(18+11)=-39$
При додаванні двох чисел з різними знаками знаходять їх модулі і від більшого модуля віднімають менший, а перед результатом ставлять знак того числа, у якого модуль більший	$-15+23=23-15=8$, $18-31=18+(-31)=$ $=-(31-18)=-13$
Віднімання двох чисел з різними знаками замінюється додаванням зменшуваного і числа, протилежного від'ємнику	$16-(-7)=16+7=23$; $-9-(+5)=-9+(-5)=$ $=-14$
Множення і ділення	
При множенні двох чисел їх модулі перемножують, а знак ставлять за вказаною схемою: $(+)\cdot(+)=+$; $(-)\cdot(-)=+$; $(+)\cdot(-)=-$; $(-)\cdot(+)=-$	$6\cdot(-4)=-24$, $-7\cdot(-3)=21$, $-9\cdot 2=-18$
При діленні двох чисел модуль першого числа (діленого) ділять на модуль другого числа (дільника), а знак ставлять за такою схемою: $(+):(+)=+$; $(-):(-)=+$; $(+):(-)=-$; $(-):(+)=-$	$-30:(-2)=15$, $-55:11=5$, $72:(-8)=-9$

Таблиця 10. **Подільність цілих чисел і ознаки подільності**

Означення	Приклад
Ціле число a ділиться на ціле число b ($b \neq 0$), якщо існує таке ціле c, що $a = bc$. Подільність можна позначати так: $a \vdots b$	$24 \vdots 8$, оскільки існує таке ціле число 3, що $24 = 8 \cdot 3$
Властивості	
1. Якщо $a \vdots b$ і $b \vdots c$, то $a \vdots c$ (*транзитивність подільності*)	$48 \vdots 12$ і $12 \vdots 6$, отже, $48 \vdots 6$
2. Якщо $a \vdots c$ і $b \vdots c$, m і n — будь-які цілі числа, то $(ma + nb) \vdots c$ Частковий випадок ($m = 1$, $n = \pm 1$). Якщо $a \vdots c$ і $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$ *Якщо кожний доданок ділиться на с, то їх алгебраїчна сума також ділиться на с*	$77 \vdots 11$ і $22 \vdots 11$, тоді $77 + 22 = 99 \vdots 11$; $77 - 22 = 55 \vdots 11$
3. Якщо $a \vdots b$ і $k \neq 0$, то $ak \vdots bk$	$6 \vdots 3$, тоді $(6 \cdot 5) \vdots (3 \cdot 5)$, тобто $30 \vdots 15$
4. Якщо $a \vdots b$ і $a \vdots c$, причому b і c — взаємно прості числа (тобто їх НСД дорівнює одиниці), то $a \vdots bc$	48 ділиться на 3 і на 8 (3 і 8 — взаємно прості числа), тоді 48 ділиться на $3 \cdot 8 = 24$

Ознаки подільності		
На яке число ділимо	**Ознака**	**Приклад**
На 2	Остання цифра числа ділиться на 2 (парна). *Ціле число n, що ділиться на 2, називається парним, і його можна подати у вигляді* $n = 2k$, *де* $k \in \mathbf{Z}$. *Ціле число n, що не ділиться на 2, називається непарним, і його можна подати у вигляді* $n = 2k + 1$, *де* $k \in \mathbf{Z}$.	$956 \vdots 2$, оскільки остання цифра 6 — парна ($6 \vdots 2$); $2003 \not\vdots\ 2$, оскільки остання цифра 3 непарна

Ознаки подільності		
На яке число ділимо	**Ознака**	**Приклад**
На 5	Остання цифра числа дорівнює 0 або 5	$375 \vdots 5$; $8500 \vdots 5$
На 10^k	Число закінчується на k нулів	$482\,900\,000 \vdots 10^5$
На 4	Число, виражене двома останніми цифрами заданого числа, ділиться на 4	$35\,724 \vdots 4$, оскільки $24 \vdots 4$
На 8	Число, виражене трьома останніми цифрами заданого числа, ділиться на 8	$17\,328 \vdots 8$, оскільки $328 \vdots 8$
На 3	Сума цифр числа ділиться на 3	$9822 \vdots 3$, оскільки $9+8+2+2=21 \vdots 3$
На 9	Сума цифр числа ділиться на 9	$15\,732 \vdots 9$, оскільки $1+5+7+3+2=$ $=18 \vdots 9$
На 11	Різниця між сумою цифр, що стоять на непарних місцях (рахуючи справа наліво), і сумою цифр, що стоять на парних місцях, ділиться на 11	$24\,836\,273 \vdots 11$, оскільки $(3+2+3+$ $+4)-(7+6+8+2)=$ $=-11 \vdots 11$

Таблиця 11. **Прості й складені числа**

Означення	Приклад
Натуральне число p називається *простим*, якщо в нього тільки два натуральні дільники — 1 і саме число p	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 … — прості числа
Натуральне число називається *складеним*, якщо воно має більше двох натуральних дільників	6, 15, 130, 998 — складені числа (наприклад, 6, крім дільників 1 і 6, ще має дільники 2 і 3)
1 не є ні простим числом, ні складеним	

Таблиця 12. **Рівняння**

Означення	Приклад
Рівняння — це рівність із змінною	$2x = 12$ — рівняння
Корінь (або розв'язок) рівняння — це таке значення змінної, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність	$x = 6$ — корінь рівняння $2x = 12$, оскільки $2 \cdot 6 = 12$ — правильна рівність
Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що їх немає	$0 \cdot x = 12$ — рівняння, у якого немає коренів, оскільки добуток $0 \cdot x = 0$ не може дорівнювати 12
Рівносильні рівняння — це рівняння, які мають ті ж самі корені. Якщо рівняння не мають коренів, то їх також вважають рівносильними	$2x = 12$ та $x - 6 = 0$ — рівносильні рівняння (обидва мають тільки один корінь $x = 6$)
Найпростіші властивості рівносильних рівнянь	**Приклад**
1. Якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу будь-який член і змінити його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному	$6x - 2 = 3x + 16$; $6x - 3x = 16 + 2$; $3x = 18$
2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на те ж саме число (яке не дорівнює нулю), то одержимо рівняння, рівносильне даному	Поділимо обидві частини рівняння на 3 ($3 \neq 0$). Маємо: $x = 6$ — рівняння, рівносильне даному. *Відповідь*: 6

Таблиця 13. **Лінійні рівняння з однією змінною**

Означення	Приклад
Рівняння виду $ax=b$, де a і b — деякі числа, називається лінійним рівнянням із змінною x	$-3x=10$ — лінійне рівняння

<table>
<tr><th colspan="5">Розв’язування лінійного рівняння $ax=b$</th></tr>
<tr><th colspan="4">Схеми розв’язування</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. $a\neq 0$</td><td>Єдиний корінь $x=\frac{b}{a}$</td><td>$5x=20$. Єдиний корінь — $x=\frac{20}{5}$, тобто $x=4$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. $a=0$</td><td rowspan="2">$0\cdot x=b$</td><td>а) $b\neq 0$</td><td>Коренів немає</td><td>$0\cdot x=5$. Коренів немає</td></tr>
<tr><td>б) $b=0$</td><td>x — будь-яке число</td><td>$0\cdot x=0$. x — будь-яке число</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Розв’язування рівнянь, які зводяться до лінійних</th></tr>
<tr><th>Схема розв’язування</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>1) Розкриваємо дужки (якщо вони є)</td><td>$2(3x-1)+x=5x+8$;
$6x-2+x=5x+8$;</td></tr>
<tr><td>2) Переносимо члени із змінною в одну частину рівняння, а без змінної — в іншу</td><td>$6x+x-5x=8+2$;</td></tr>
<tr><td>3) Зводимо подібні доданки</td><td>$2x=10$;</td></tr>
<tr><td>4) Розв’язуємо одержане лінійне рівняння $ax=b$</td><td>$x=5$.</td></tr>
</table>

Таблиця 14. **Степінь з натуральним показником**

Означення	Приклад
$a^1 = a$	$5^1 = 5;\ (-6)^1 = -6$
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{разів}}$ (a — будь-яке число, $n \in N$, $n \geqslant 2$)	$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27;$ $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16;$ $1^n = 1,\ 0^n = 0,\ n \in N$

Властивості степенів		
Властивість	**Приклад**	**Використання для зміни форми подання степенів**
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^3 \cdot 3^2 = 3^5 = 243$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$	$7^6 : 7^4 = 7^{6-4} = 7^2 = 49$	$a^{m-n} = a^m : a^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10} = 1024$	$a^{mn} = (a^m)^n$
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$	$a^n b^n = (ab)^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. При піднесенні додатного числа до степеня завжди одержуємо додатне число	$5^4 = 625$, $5^3 = 125$ — додатні числа	
7. Якщо від'ємне число піднести до парного степеня, то одержимо додатне число (знак «+»)	$(-5)^4 = 5^4 = 625$, $(-1)^{20} = 1$ — додатні числа	
8. Якщо від'ємне число піднести до непарного степеня, то одержимо від'ємне число	$(-5)^3 = -5^3 = -125$, $(-1)^{11} = -1$ — від'ємні числа	

Таблиця 15. **Одночлени та дії над ними**

Означення	Приклад
Одночленом називається скінченний добуток чисел, букв та їхніх натуральних степенів, а також самі числа, букви та їхні степені. **Число 0 називається нульовим одночленом**	$0;\ 3a^2x;\ -\frac{2}{3}ab^3;\ 5;\ y;\ x^6$ — одночлени
Степенем одночлена називається сума показників букв, що входять в одночлен. Якщо одночленом є число, що не дорівнює нулю, то його степінь вважається рівним нулю **Число 0 степеня не має**	$3a^3b^2c$ — одночлен шостого степеня $(3+2+1=6)$; $5ax^3$ — одночлен четвертого степеня $(1+2=4)$; 7 — одночлен нульового степеня
Якщо до запису одночлена входить змінна x у степені k (x^k), то говорять, що цей одночлен має по x (або відносно x) степінь k	$5ax^3$ — одночлен третього степеня відносно змінної x
Одночлен записано *у стандартному вигляді*, якщо перший його множник є число, що називається ***коефіцієнтом*** одночлена, а далі стоять букви в деяких степенях, розташовані за алфавітом (латинським або грецьким)	$7a^5b^3c^6;\ -4xy^3z^2;\ 3\alpha^2\beta\gamma^3$ — одночлени стандартного вигляду
Одночлени називаються ***подібними***, якщо вони рівні між собою або розрізняються лише своїми коефіцієнтами	$4a^3b^2;\ -7a^3b^2;\ \frac{2}{3}a^3b^2$ — подібні одночлени

Означення	Приклад
Дії над одночленами	
Додавання і віднімання	$3a^2+ab+b^2+5a^2-3ab=8a^2-2ab+b^2$
Множення	$\left(4a^3b^2c\right)\cdot\left(-2a^4bd\right)=-8a^7b^3cd$
Піднесення до степеня	$\left(2x^2y\right)^3=2^3\cdot\left(x^2\right)^3\cdot y^3=8x^6y^3$
Ділення	$\left(18a^6b^4c\right):\left(3a^3b^2c\right)=\dfrac{18a^6b^4c}{3a^3b^2c}=6a^3b^2$

Таблиця 16. **Многочлени**

Означення і зміст	Приклади
Многочленом називається алгебраїчна сума декількох одночленів (кожний із них називається членом многочлена). Одночлени також вважаються многочленами, що складаються з одного члена. **Число 0 називається нульовим многочленом**	$5a^2b+ab+3$; $2x^3-5x^2+1$ — многочлени (у другому многочлені: $-5x^2=+(-5x^2)$); 0; $2ax^2$; 7; x — многочлени, що складаються з одного члена
Якщо всі члени многочлена записано в стандартному вигляді і виконано зведення подібних доданків, то одержуємо многочлен стандартного вигляду	$3x^2-7x^2+2$; $2ab+b^2-9a^2$ — много-члени стандартного вигляду
Степенем ненульового многочлена називається найбільший степінь із степенів його членів (одночленів). Нульовий многочлен (0) степеня не має	$a^2+abc-c^2$ — многочлен третього степеня (оскільки найбільший степінь у члена abc — третій)

Означення і зміст	Приклади
Дії над многочленами	
Додавання і віднімання многочленів	
При додаванні і відніманні многочленів використовують правила розкриття дужок (якщо розкривають дужки, перед якими стоїть знак «−», знаки всіх членів, що були в дужках, змінюються на протилежні)	$(2a^2 + 3ab - 5b) + (7a^2 - 4ab + 5b) = 2a^2 + 3ab - 5b + 7a^2 - 4ab + 5b = 9a^2 - ab$; $(4x - 3y) - (2x - 5y) = 4x - 3y - 2x + 5y = 2x + 2y$
Множення і ділення многочленів	
Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на цей одночлен і результати додати	$(x^2 - 4x)\cdot 3x^3 = x^2 \cdot 3x^3 - 4x \cdot 3x^3 = 3x^5 - 12x^4$
Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого многочлена і отримані добутки додати	$(a + 5b)(a - 2b) = a^2 - 2ab + 5ab - 10b^2 = a^2 + 3ab - 10b^2$
Щоб поділити многочлен на одночлен, потрібно розділити на цей одночлен кожний член многочлена і отримані частки додати	$\frac{12a^2b + 6ab^2}{3a} = \frac{12a^2b}{3a} + \frac{6ab^2}{3a} = 4ab + 2b^2$

Таблиця 17. **Формули скороченого множення**

Формула	Словесне формулювання
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	*Квадрат суми* двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого виразу на другий плюс квадрат другого виразу
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	*Квадрат різниці* двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого виразу на другий плюс квадрат другого виразу
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	*Різниця квадратів* двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і їх суми
$a^3 + b^3 =$ $= (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	*Сума кубів* двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів на неповний квадрат різниці цих виразів
$a^3 - b^3 =$ $= (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	*Різниця кубів* двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на неповний квадрат суми цих виразів
$(a+b)^3 =$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$ $(a+b)^3 =$ $= a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$	Куб суми двох виразів дорівнює кубу першого виразу плюс потроєний добуток квадрата першого виразу на другий плюс потроєний добуток першого виразу на квадрат другого і плюс куб другого виразу
$(a-b)^3 =$ $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$ $(a-b)^3 =$ $= a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)$	Куб різниці двох виразів дорівнює кубу першого виразу мінус потроєний добуток квадрата першого виразу на другий плюс потроєний добуток першого виразу на квадрат другого і мінус куб другого виразу
$(a+b+c)^2 =$ $= a^2 + b^2 + c^2 +$ $+ 2ab + 2ac + 2bc$	Квадрат суми кількох виразів дорівнює сумі квадратів усіх доданків плюс усі подвоєні добутки кожного виразу на кожний наступний

Таблиця 18. **Розкладання многочленів на множники**

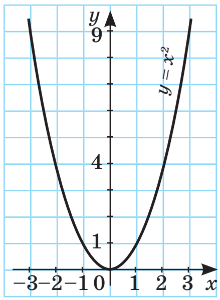
Розкласти многочлен на множники означає замінити даний многочлен на тотожно рівний йому добуток кількох многочленів (серед яких може бути і одночлен).
Найчастіше використовують три основні способи: винесення спільного множника за дужки, застосування тотожностей скороченого множення, групування

Спосіб	План	Приклади
Винесення спільного множника за дужки	1. Перевіряємо, чи не мають усі одночлени, які входять до многочлена, спільного множника. 2. Якщо мають, то виносимо його за дужки (щоб одержати вираз у дужках, можна поділити кожний член многочлена на спільний множник). Якщо спільний множник виноситься із знаком «−», то знаки всіх доданків у дужках змінюються на протилежні	1) $10x^4y^3 - 15x^6y =$ $= 5x^4y(2y^2 - 3x^2)$; 2) $-24a^3b^2c - 16a^2c^2 =$ $= -8a^2c\,(3ab^2 + 2c)$
Застосування тотожностей скороченого множення	Перевіряємо, чи не є заданий многочлен виразом, до якого безпосередньо можна застосувати одну з тотожностей скороченого множення (різницею квадратів, квадратом суми або різниці, різницею або сумою кубів, кубом суми або різниці)	1) $a^4 - 16 = \left(a^2\right)^2 - 4^2 =$ $= \left(a^2 - 4\right)\left(a^2 + 4\right) =$ $= \left(a^2 - 2^2\right)\left(a^2 + 2^2\right) =$ $= (a-2)(a+2)\left(a^2+4\right)$; 2) $x^6 + 4x^3 + 4 =$ $= \left(x^3\right)^2 + 2\cdot 2\cdot x^3 + 2^2 =$ $= \left(x^3+2\right)^2$;

Спосіб	План	Приклади
		3) $b^6-27=\left(b^2\right)^3-3^3=$ $=\left(b^2-3\right)\times$ $\times\left(\left(b^2\right)^2+b^2\cdot 3+3^2\right)=$ $=\left(b^2-3\right)\left(b^4-3b^2+9\right)$
Групування членів	1) Розбиваємо многочлен на декілька (дві чи більше) груп. 2) До кожної з цих груп намагаємося застосувати перші два методи. 3) Якщо всі групи мають спільний множник, то виносимо його за дужки	1) $\underbrace{a+3b}_{\text{I група}}+\underbrace{a^2+3ab}_{\text{II група}}=$ $=(a+3b)+a(a+3b)=$ $=(a+3b)(1+a)$; 2) $\underbrace{x^2-y^2}_{\text{I група}}-\underbrace{x^2y-xy^2}_{\text{II група}}=$ $=(x-y)(x+y)-$ $-xy(x+y)=$ $=(x+y)(x-y-xy)$

Таблиця 19. **Поняття функції та її графіка**

Означення та зміст	Приклад
Функцією називають відповідність, при якій кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y. У цьому випадку залежна змінна y також називається функцією від x. Змінна x називається незалежною змінною або аргументом. Множина D — **область визначення функції**	Таблиця x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 задає функцію з областю визначення, яка складається з десяти чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Цю саму функцію можна задати так: $y=x^2$, де x — цифра (у десятковій системі числення)

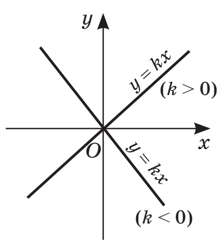
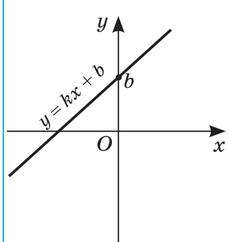
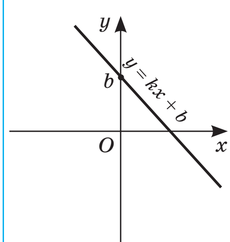
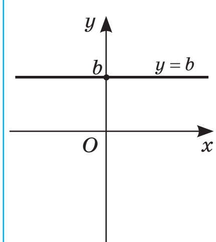
<table>
<tr><th>Означення та зміст</th><th colspan="2">Приклад</th></tr>
<tr><td>Якщо функцію задають формулою і нічого не говорять про область її визначення (D), то вважають, що ця область — множина всіх значень змінної, при яких задана формула має зміст</td><td colspan="2">1. Для функції $y = x^2$ область визначення — множина всіх чисел.
2. Для функції $y = \frac{1}{x}$ область визначення — множина всіх чисел, які не дорівнюють нулю ($D : x \neq 0$)</td></tr>
<tr><td>Область значень функції — це множина тих значень, яких може набувати сама функція при всіх значеннях аргументу з області визначення</td><td colspan="2">Для функції $y = x^2$ область значень — $y \geqslant 0$, оскільки квадрат будь-якого числа завжди більше або дорівнює нулю</td></tr>
<tr><th colspan="3">Графік функції</th></tr>
<tr><td>Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенню аргументу, а ординати — відповідним значенням функції</td><td>
</td><td>Графік функції $y = x^2$ складається з усіх точок координатної площини з координатами:
<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>2</td><td>$\ldots$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1</td><td>0</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>1</td><td>4</td><td>$\ldots$</td></tr>
</table>
Графік функції $y = x^2$ називається параболою</td></tr>
</table>

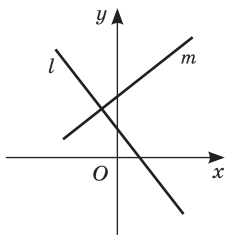
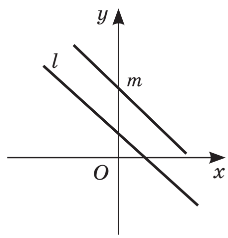
Таблиця 20. **Лінійна функція**

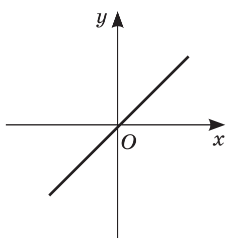
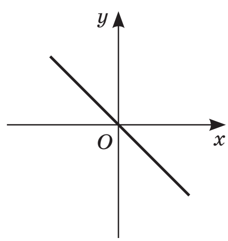
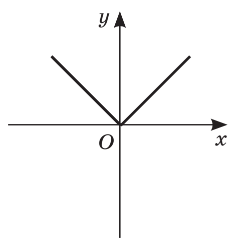
Означення	Приклад
Лінійною функцією називається функція виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа	$y = 2x + 5$, $y = -3x - 1$, $y = 2{,}5x$, $y = \frac{2}{3}x$, $y = 4$ — лінійні функції

Продовження таблиці 20

Властивості		
1. Область визначення	x — будь-яке число	
2. Область значень	1) При $k \neq 0$ y — будь-яке число; 2) при $k = 0$ $y = b$	
3. Точки перетину з осями координат	Вісь Ox, $y = 0$	1) При $k \neq 0$ $x = -\frac{b}{k}$ — абсциса точки перетину, тобто точка перетину з віссю Ox: $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$; 2) при $k = 0$ $y = b$ — пряма, яка паралельна осі Ox при $b \neq 0$ і збігається з віссю Ox при $b = 0$
	Вісь Oy, $x = 0$	$y = b$ — ордината точки перетину, тобто точка перетину з віссю Oy: $(0; b)$
5. Графіком лінійної функції завжди є пряма (число k називається кутовим коефіцієнтом цієї прямої)	1) При $b = 0$ $y = kx$ — пряма, що проходить через початок координат; 2) при $b \neq 0$ $y = kx + b$ — пряма, що не проходить через початок координат	

Графіки лінійних функцій			
$b = 0$ $y = kx$	$b \neq 0$ $(y = kx + b)$		
	$k > 0$	$k < 0$	$k = 0$
			

Взаємне розміщення графіків лінійних функцій	
Умова перетину	**Умова паралельності**
$y = k_1x + b_1$ — пряма l, $y = k_2x + b_2$ — пряма m	
 Якщо $k_1 \neq k_2$, то прямі l і m перетинаються в одній точці	 Прямі l і m паралельні тоді і тільки тоді, коли їх кутові коефіцієнти рівні: $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$.

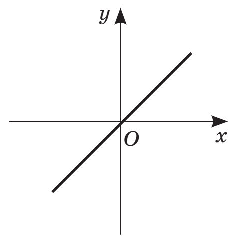
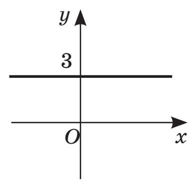
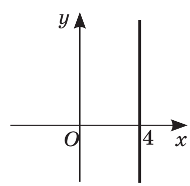
Ці графіки корисно пам'ятати		
$y = x$	$y = -x$	$y = \lvert x \rvert$
		

Таблиця 21. **Лінійні рівняння з двома змінними**

Означення і властивості	Приклади
Лінійним рівнянням з двома змінними x і y називається рівняння виду $ax+by=c$ (або виду $ax+by+c=0$)	$2x-3y=4$ $2x-3y-4=0$ — лінійні рівняння
Якщо в лівій частині рівняння $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то це рівняння першого степеня з двома змінними	$0x-2y=3$ — лінійне рівняння; $x-5y=4$ — рівняння першого степеня з двома змінними
Розв'язком рівняння з двома змінними x і y називається кожна пара чисел $(x;\ y)$, яка перетворює це рівняння на правильну числову рівність	Для рівняння $5x+2y=9$ пара $(1;\ 2)$ є розв'язком, оскільки при $x=1$ і $y=2$ одержуємо $5\cdot1+2\cdot2=9$; $9=9$ — правильна рівність. Пара $(0;\ 1)$ не є розв'язком заданого рівняння, оскільки при $x=0$ і $y=1$ одержуємо $5\cdot0+2\cdot1=9$; $2=9$ — неправильна рівність
Два рівняння з двома змінними називаються рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки або обидва рівняння не мають розв'язків	Рівняння $x-y=0$ і $x=y$ — рівносильні

Властивості рівносильних рівнянь з двома змінними	
Якщо обидві частини рівняння з двома змінними помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю, то одержимо рівняння, рівносильне даному	Рівняння $x+3y=2$ і $2x+6y=4$ — рівносильні (друге можна одержати з першого множенням на 2)
Якщо будь-який член рівняння з двома змінними перенести з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне даному	Рівняння $x+5y=6$ і $x+5y-6=0$ — рівносильні

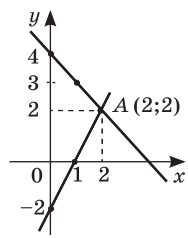
Закінчення таблиці 21

<table>
<tr><th colspan="2">Графік лінійного рівняння з двома змінними</th></tr>
<tr><th>Означення і властивості</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>На координатній площині графіком лінійного рівняння
$$ax + by = c$$
є множина точок, координати яких задовольняють дане рівняння</td><td rowspan="2">Графіком рівняння
$x - y = 0$ є пряма ($y = x$)

</td></tr>
<tr><td>Якщо $a \neq 0$ чи $b \neq 0$, графіком заданого рівняння є пряма, і для її побудови досить отримати будь-які дві точки цієї прямої</td></tr>
<tr><td>Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, графіком заданого рівняння є пряма, паралельна осі Ox</td><td>Графіком рівняння
$0x + y = 3$ є пряма $y = 3$

</td></tr>
<tr><td>Якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, графіком заданого рівняння є пряма, паралельна осі Oy</td><td>Графіком рівняння
$x + 0y = 4$ є пряма $x = 4$

</td></tr>
</table>

Таблиця 22. **Системи лінійних рівнянь з двома змінними**

Означення	Приклади
Системою рівнянь називають два або декілька рівнянь, для яких потрібно знайти спільні розв'язки	$\begin{cases} x-y=5; \\ 2x+y=1 \end{cases}$ — система двох рівнянь з двома змінними
Для запису системи рівняння об'єднують фігурною дужкою	
Розв'язком системи рівнянь називається спільний розв'язок усіх її рівнянь	Пара (2; −3), тобто $\begin{cases} x=2, \\ y=-3 \end{cases}$ є розв'язком системи $\begin{cases} x-y=5, \\ 2x+y=1, \end{cases}$ оскільки $\begin{cases} 2-(-3)=5, \\ 2\cdot 2+(-3)=1 \end{cases}$ — правильні рівності
Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає. Якщо система не має розв'язків, то її називають несумісною	$\begin{cases} x+y=3, \\ x+y=5 \end{cases}$ — несумісна система
Дві системи називаються рівносильними, якщо вони мають ті самі розв'язки	Системи $\begin{cases} x-y=0, \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=y, \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ рівносильні

Графічне розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними

План	Приклад	
1. Будуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи. 2. Знаходимо координати спільних точок графіків.	Розв'язати графічно систему $\begin{cases} 2x-y=2, \\ x+y=4. \end{cases}$ *Розв'язання* Побудуємо графіки рівнянь системи. Для цього на кожній прямій вкажемо по дві точки.	

<table>
<tr><th>План</th><th colspan="2">Приклад</th></tr>
<tr><td>3. Координати цих спільних точок і є розв'язками системи</td><td>Для рівняння $2x-y=2$:
$\begin{array}{c|c|c|} x & 0 & 1 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array}$
Для рівняння $x+y=4$:
$\begin{array}{c|c|c|} x & 0 & 1 \\ \hline y & 4 & 3 \end{array}$</td><td>Графіки перетинаються в точці з координатами (2; 2).
Відповідь: Система має єдиний розв'язок (2; 2)</td></tr>
</table>

Таблиця 23. **Розв'язування систем рівнянь способом підстановки та способом додавання**

<table>
<tr><th colspan="2">Спосіб підстановки</th></tr>
<tr><td colspan="2">Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x+y=4, \\ 3x+5y=13. \end{cases}$</td></tr>
<tr><th>План</th><th>Розв'язання</th></tr>
<tr><td>1. Виражаємо з якогось рівняння одну змінну через іншу</td><td>З першого рівняння
$y=4-2x$</td></tr>
<tr><td>2. Підставляємо одержаний вираз в інше рівняння</td><td>Підставляємо замість y вираз $4-2x$ в друге рівняння:
$3x+5(4-2x)=13$</td></tr>
<tr><td>3. Розв'язуємо одержане рівняння</td><td>$3x+20-10x=13;$
$3x-10x=13-20;$
$-7x=-7;\ x=1$</td></tr>
<tr><td>4. Знаходимо відповідне значення другої змінної</td><td>$y=4-2x=2$</td></tr>
<tr><td>5. Записуємо відповідь</td><td>Відповідь: $\begin{cases} x=1; \\ y=2 \end{cases}$
Відповідь: (1; 2)</td></tr>
</table>

Спосіб додавання	
Способом додавання зручно розв'язувати системи, у яких коефіцієнти при одній із змінних — протилежні числа	
Приклад. Розв'яжіть систему $\begin{cases} 2x+3y=9; \\ 5x-3y=12 \end{cases}$	
План	**Розв'язання**
1. Додаємо рівняння системи (в цій системі коефіцієнти при змінній y — протилежні числа). 2. Розв'язуємо одержане рівняння. 3. Підставляємо одержане значення змінної в будь-яке рівняння системи і знаходимо відповідне значення другої змінної. 4. Записуємо відповідь	Додаємо рівняння системи і одержуємо $7x = 21;$ $x = 3.$ Тоді з першого рівняння маємо: $2 \cdot 3 + 3y = 9;$ $3y = 3;$ $y = 1.$ *Відповідь*: (3; 1)

ЗМІСТ

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович

АЛГЕБРА. 8 КЛАС
ОПОРНІ ТАБЛИЦІ, СХЕМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ, ТРЕНУВАЛЬНІ ТЕСТИ

Редактор *Г. Ю. Вепрік*
Технічний редактор *В. І. Труфен*

Код Т6488У. Підписано до друку 29.10.2008. Формат 70×90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 5,44.

ТОВ Видавництво «Ранок». Свідоцтво ДК № 279 від 13.12.2000.
61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.

Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а.
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.
Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. E-mail: office@ranok.kharkov.ua

З питань реалізації звертатися за тел.: у Харкові — (057) 712-91-44, 712-90-87;
Києві — (044) 599-14-53, 417-20-80; Донецьку — (062) 345-98-24; Житомирі — (0412) 41-27-95;
Дніпропетровську — (0562) 39-61-60, 39-63-54; Львові — (032) 243-08-85;
Сімферополі — (0652) 22-87-01, 22-95-30; Тернополі — (0352) 26-86-94, 53-32-01,
Миколаєві — (0512) 35-40-39, Рівному — (0362) 23-78-64.
E-mail: commerce@ranok.kharkov.ua
«Книга поштою»: 61045 Харків, а/с 3355. Тел. (057) 717-74-55, (067) 546-53-73.
E-mail: pochta@ranok.kharkov.ua
www.ranok.com.ua

ПОСІБНИК МІСТИТЬ

- навчальний матеріал, який подано в таблицях
- схеми та плани розв'язування вправ
- тренувальні тести
- численні приклади

ПОСІБНИК ЗАБЕЗПЕЧИТЬ

- повноту та глибину набутих знань
- зручність орієнтування у навчальному матеріалі
- цікавий процес навчання
- легкість запам'ятовування вивченого матеріалу

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

«Книга — поштою»
61045 Харків, а/с 3355, «Ранок-пошта»
(057) 717-74-55
pochta@ranok.kharkov.ua

ISBN 978-966-672-345-4