ББК 22.14я72
Р59

Навчальне видання

Роганін Олександр Миколайович

ГЕОМЕТРІЯ В ТАБЛИЦЯХ І СХЕМАХ

Головний редактор *Ю. Єрьоменко*
Художній редактор *О. Суботська*
Технічний редактор *В. Мельник*

Підписано до друку 27.04.2016 р.
Формат 84x108 $^1/_{16}$. Папір газетний. Гарнітура School Book.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 15. Наклад 2000 прим. Зам. № 16-04-2705.

«НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА»
Свідоцтво серія ДК № 4049 від 18.04.2011 р.

З питань оптових поставок звертатися:
61057, м. Харків, вул. Сумська, 13,
тел./факс: (057) 717-10-26;
моб.: (067) 572-09-64, (067) 572-09-53
E-mail: opt@torsing.ua

Книга — поштою:
м. Харків, вул. Сумська, 13,
тел.: (050) 305-05-41,
0-800-50-10-26 (лінія безкоштовна)
Інтернет-магазин: www.torsing.ua

Віддруковано з готових діапозитивів ТОВ «ПЕТ»
Св. ДК № 4526 від 18.04.2013 р.
61024, м. Харків, вул. Ольмінського, 17.

Р59 **Роганін О. М.**
Геометрія в таблицях і схемах. — Харків: НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА, 2016. — 96 с.

ISBN 978-966-939-108-7 (серія)
ISBN 978-966-939-109-4

У даному посібнику в зручній формі (у вигляді таблиць і схем) викладено основні поняття геометрії, вивчення яких передбачено чинною шкільною програмою.

Посібник призначений для учнів і вчителів загальноосвітніх шкіл, абітурієнтів, а також для всіх, хто цікавиться математикою.

ББК 22.14 я72

ISBN 978-966-939-108-7 (серія)
ISBN 978-966-939-109-4

Геометрія

в таблицях і схемах

- Теореми
- Способи доведення
- Аксіоми
- Тіла обертання

Торсінг

ЗМІСТ

ТАБЛИЦЯ 1. ГЕОМЕТРІЯ ЯК НАУКА І ЯК НАВЧАЛЬНИЙ ПРЕДМЕТ

Долина Ніла

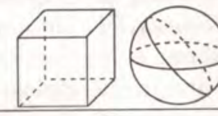
Слово «геометрія» грецького походження («ge» — земля, «metreo» — вимірюю). Слово «планіметрія» походить від латинського кореня «planum» — плоска поверхня і грецького — «metreo» — вимірюю. Слово «стереометрія» походить від грецьких слів «stereos» — просторовий, «metreo» — вимірюю.

Евклід (365–300 до н.е.)

Геометрія — математична наука про просторові форми, розміри і співвідношення геометричних об'єктів (фігур, тіл).

Планіметрія — розділ геометрії, в якому вивчають властивості фігур, які розташовані в одній площині.

Стереометрія — розділ геометрії, в якому вивчають властивості просторових тіл.



Періоди розвитку геометрії

I період — зародження геометрії як математичної науки, початок якого губиться в глибині століть, а кінцем вважають V ст. до н.е. Цей період характеризується накопиченням фактів і встановленням перших залежностей між геометричними фігурами. Почався він у Стародавньому Єгипті й Вавілоні, у VII ст. до н.е. Ці знання були перенесені в Грецію, де поступово вони почали оформлюватися в чітку систему.

II період — (V ст. до н.е. — XVII ст. н.е.) — період створення й подальшого розвитку геометрії як самостійної науки. Близько 300 р. до н.е. з'явилися «Начала» Евкліда, в яких геометрія була систематизована. Розвиткові геометрії сприяли вчені Греції, арабського Сходу, Середньої Азії, Індії, Китаю, середньовічної Європи.

III період — (XVII ст. — 1826 р.). На цьому етапі геометрія як наука розглядає набагато загальніші фігури й застосовує істотньо нові методи. У цей період виникають: аналітична геометрія, диференціальна геометрія, проективна геометрія, нарисна геометрія.

IV період — (1826 рік) починається з відкриття М. І. Лобачевським неевклідової геометрії, яка містить у собі, як окремий випадок, геометрію Евкліда. У напрямах, накреслених видатними математиками, розвивається сучасна геометрія. Одним із важливих розділів сучасної геометрії є топологія.

ТАБЛИЦЯ 2. МАТЕМАТИЧНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Арістотель (384–322 до н.е.)

Аксіома: від грецького «axios» — цінний, «axiota» — пошана, повага, авторитет. Термін ввів Аристотель.

Теорема: від грецького «theoreo» — розмірковую, «theorema» — істина.

Давід Гільберт (1862–1943)

Повну систему аксіом евклідової геометрії дав Давід Гільберт (1899 р.)

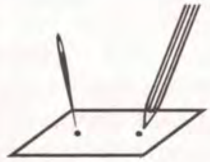
Аксіома **Аксіома** — математичне твердження, яке приймається без доведення.	**Означення** **Означення** — чітке формулювання того чи іншого математичного поняття.
Теорема **Теорема** — математичне твердження, істинність якого встановлюють шляхом доведення. **Доведення** — міркування, в ході якого встановлюється істинність чи хибність твердження.	**Ознака** **Ознака** — твердження, яке дозволяє довести, що дана фігура є фігурою, що має дані властивості або пов'язана необхідними відношеннями.

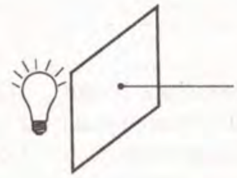
Елементи теорії доведень

Звичайною мовою	Мовою логіки	Приклад
1. Якщо A, то B (пряма теорема) A — умова, B — висновок	$A \Rightarrow B$ — істинне	Якщо трикутник прямокутний, то сума квадратів його катетів дорівнює квадрату гіпотенузи.
2. Якщо B, то A (обернена теорема)	$B \Rightarrow A$ — істинне	Якщо в деякому трикутнику сума квадратів двох сторін дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник є прямокутним.
3. Якщо не A, то не B (протилежна теорема)	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ — істинне	Якщо трикутник не прямокутний, то квадрат будь-якої його сторони не дорівнює сумі квадратів двох інших сторін.
4. Якщо не B, то не A (теорема, обернена протилежній)	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ — істинне	Якщо квадрат будь-якої сторони трикутника не дорівнює сумі квадратів двох інших сторін, то такий трикутник не є прямокутним.
A достатня умова для B	$A \Rightarrow B$ — істинне	Для того, щоб ромб був квадратом, достатньо, щоб діагоналі ромба були рівні.
A необхідна умова для B	$B \Rightarrow A$ (або $\overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{B}}$) — істинне	Для того, щоб ромб був квадратом, необхідно, щоб діагоналі ромба були рівні.
A необхідна, але не достатня умова для B	$B \Rightarrow A$ — істинне, або $A \Rightarrow B$ — хибне	Для того, щоб чотирикутник був ромбом, необхідно, щоб діагоналі чотирикутника були перпендикулярні (але не достатньо).
A достатня, але не необхідна умова для B	$A \Rightarrow B$ — істинне, або $B \Rightarrow A$ — хибне	Для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, достатньо, щоб він мав усі рівні сторони (але не необхідно).
A необхідна й достатня умова для B (A тоді й тільки тоді, коли B)	$A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$ — істинні $A \Leftrightarrow B$ — істинне	Чотирикутник тоді й тільки тоді є паралелограмом, коли його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

ТАБЛИЦЯ 3. ТОЧКА, ПРЯМА, ПЛОЩИНА, ПРОМІНЬ, ПІВПЛОЩИНА

Слово «точка» є перекладом латинского слова «pungo», що означає «тикаю», «доторкаюся».

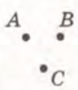




Слово «лінія» походить від латинськього слова «linea», що значить «льон», «льняна нитка», іноді це слово розуміють як «пряма лінія», і звідси походить слово «лінійка».

Точка

Точка — неозначуване поняття. Уявлення про точку дає слід на аркуші паперу, зроблений добре загостреним олівцем.



Позначають точки великими латинськими буквами: A, B, C.

Пряма

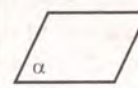
Пряма — неозначуване поняття. Уявлення про пряму дають: туго натягнута нитка; промінь світла, який проходить крізь вузький отвір.

Позначають прямі латинськими буквами: a, b..., або двома великими латинськими буквами: AC, BC... .

Пряма нескінченна.

Площина

Площина — неозначуване поняття. Уявлення про площину дають: поверхня стола, поверхня віконного скла, поверхня озера в тиху погоду тощо.

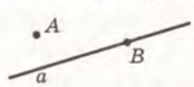


Площину мислять необмеженою, ідеально рівною і гладенькою.

Позначають площини малими грецькими буквами: α, ...

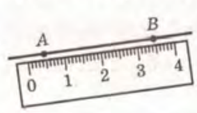
Аксіоми належності

- Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.



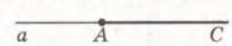
$A \notin a$, $B \in a$.

- Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.



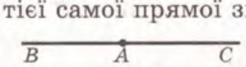
Промінь

Промінь (півпряма) — частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежить по один бік від даної на ній точки (**початок променя**).



AC — промінь.

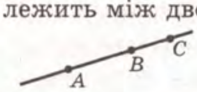
Доповняльні промені — різні промені однієї й тієї самої прямої зі спільним початком.



Промені AC і AB — доповняльні.

Аксіома розміщення точок на прямій

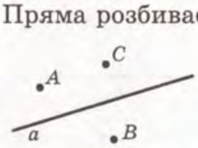
Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.



Точка B лежить між точками A і C.

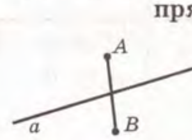
Аксіома розміщення точок відносно прямої на площині

Пряма розбиває площину на дві півплощини.



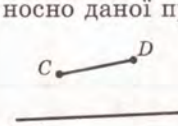
Точки A і C лежать в одній півплощині, точки A і B (B і C) лежать в різних півплощинах.

Властивості розміщення точок відносно прямої на площині



Якщо точки належать різним півплощинам, то відрізок, що з'єднує їх, перетинає пряму.

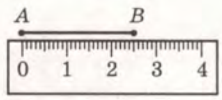
Якщо відрізок перетинає пряму, то кінці відрізка належать різним півплощинам відносно даної прямої.



Якщо точки належать одній півплощині, то відрізок, що з'єднує їх, не перетинає пряму.

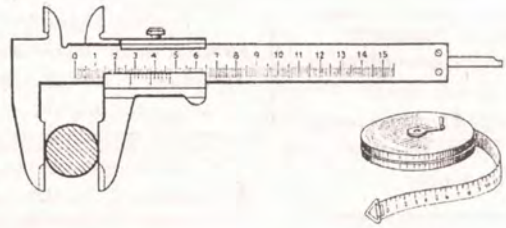
Якщо відрізок не перетинає пряму, то кінці відрізка належать одній півплощині відносно даної прямої.

ТАБЛИЦЯ 4. ВІДРІЗОК І ЙОГО ДОВЖИНА. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ



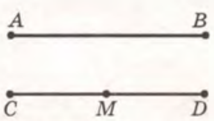
$AB = 2{,}5$ см

Лінійка найраніш з'явилася в Китаї.



Позначення відрізка двома буквами, які відповідають його кінцям, запровадили ще стародавні греки.

Означення



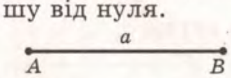
Відрізок — частина прямої, обмежена двома точками, включаючи ці точки.

Рівні відрізки — відрізки, які співпадають при накладанні. $CM = MD$, $AB = CD$.

Середина відрізка — точка, яка ділить відрізок навпіл. M — середина CD, $CM = MD$.

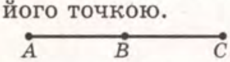
Вимірювання відрізків

1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.



$AB = a > 0$

2. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.



$AC = AB + BC$

3. Рівні відрізки мають рівні довжини.
4. Якщо відрізки мають рівні довжини, то вони рівні.

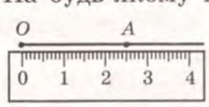
Одиниці довжини

$$1\begin{matrix}\text{см}\\\text{дм}\\\text{м}\end{matrix} = 10\begin{matrix}\text{мм}\\\text{см}\\\text{дм}\end{matrix} \qquad 1\begin{matrix}\text{дм}\\\text{м}\end{matrix} = 100\begin{matrix}\text{мм}\\\text{см}\end{matrix}$$

$$1\begin{matrix}\text{м}\\\text{км}\end{matrix} = 1000\begin{matrix}\text{мм}\\\text{м}\end{matrix}$$

Відкладання відрізків

На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.



Відстань між двома точками

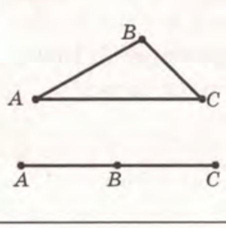
Відстань між різними точками — довжина відрізка з кінцями в даних точках.

Відстань між точками, що співпадають, дорівнює 0.

Для будь-яких точок A і B відстань від A до B дорівнює відстані від B до A.

$AB = BA$

Для будь-яких трьох точок відстань між двома з них не більша суми двох інших відстаней.



$AC \le AB + BC$

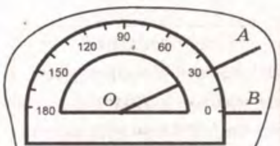
Порівняльна таблиця метричних та інших мір довжини

1 верста = 1,0668 кілометра;
1 сажень = 2,1336 метра;
1 аршин = 71,12 сантиметра;
1 вершок = 4,445 сантиметра;
1 фут = 30,48 сантиметра;
1 дюйм = 2,54 сантиметра;
1 кілометр = 0,937363 версти;

$$1\ \text{метр} = \begin{cases} 0{,}468691\ \text{сажня;} \\ 1{,}40607\ \text{аршина;} \\ 22{,}4972\ \text{вершка;} \\ 3{,}28084\ \text{фута;} \\ 39{,}3701\ \text{дюйма;} \end{cases}$$

1 географічна миля = 6,9569 версти = 7,4217 кілометра;
1 морська миля = 1,7362 версти = 1,8522 кілометра.

ТАБЛИЦЯ 5. КУТИ ТА ЇХ ГРАДУСНІ МІРИ



$\angle AOB = 30°$

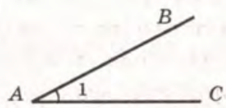
Слово «бісектриса» походить від латинських «bis» — двічі, «seco» — січу і в перекладі означає «та, що розтинає надвоє».

Термін «градус» латинського походження, «gradus» означає «крок», «ступінь».

Знак кута було введено в XVII ст.

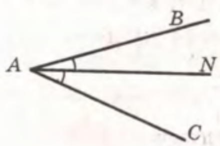
Астролябія

Означення



Кут — фігура, утворена двома променями, які виходять із однієї точки **(вершини).**

$\angle BAC$, $\angle 1$, $\angle A$.

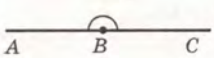


Бісектриса — промінь, який виходить із вершини кута й ділить його навпіл.

AN — бісектриса, $\angle BAN = \angle CAN$

Рівні кути — кути, які співпадають при накладанні. $\angle BAN = \angle CAN$.

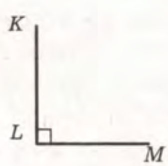
Види кутів



Розгорнутий кут — кут, сторони якого лежать на одній прямій.

$\angle ABC$ — розгорнутий,

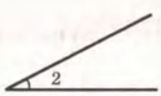
$\angle ABC = 180°$.



Прямий кут — кут, який дорівнює половині розгорнутого кута.

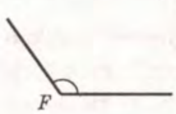
$\angle KLM$ — прямий,

$\angle KLM = 90°$.



Гострий кут — кут, менший від прямого кута.

$\angle 2$ — гострий, $\angle 2 < 90°$.



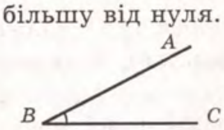
Тупий кут — кут, більший від прямого, але менший від розгорнутого.

$\angle F$ — тупий,

$90° < \angle F < 180°$.

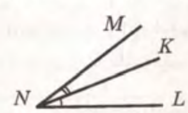
Вимірювання кутів

1. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля.



$\angle ABC > 0$

2. Розгорнутий кут дорівнює 180°.
3. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.



$\angle MNL = \angle MNK + \angle KNL$

4. Рівні кути мають рівні градусні міри.
5. Якщо два кути мають рівні градусні міри, то вони рівні.

Одиниці вимірювання кутів

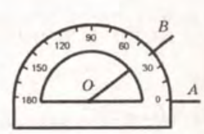
Градус — величина (градусна міра) кута, яка дорівнює $\frac{1}{180}$ частині розгорнутого кута.

Мінута — $\frac{1}{60}$ частина градуса.

Секунда — $\frac{1}{60}$ частина мінути.

$1° = 60'$, $1' = 60''$, $1' = \frac{1}{60}°$, $1'' = \frac{1}{60}'$.

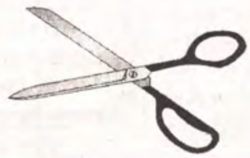
Відкладання кутів



Від будь-якого променя в дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

ТАБЛИЦЯ 6. СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ. КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

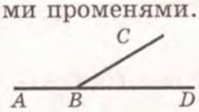
Термін «вертикальні кути» походить від латинського «verticalis», що означає «вершинний».



Рівність вертикальних кутів уперше довів старогрецький учений Фалес Мілетський.

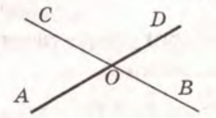
Суміжні кути

Суміжні кути — два кути, в яких одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями.



$\angle ABC$ і $\angle CBD$ — суміжні кути.

Вертикальні кути

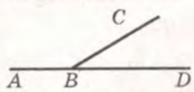


Вертикальні кути — два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого.

$\angle AOB$ і $\angle COD$ — вертикальні кути,
$\angle COA$ і $\angle DOB$ — вертикальні кути.

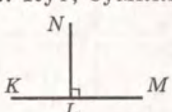
Властивості суміжних кутів

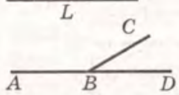
1. Сума суміжних кутів дорівнює 180°.



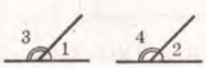
$\angle ABC + \angle CBD = 180°$.

2. Кут, суміжний з прямим кутом, є прямим кутом; суміжний з гострим кутом, є тупим кутом; кут, суміжний з тупим кутом, є гострим кутом.



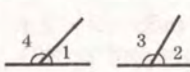


3. Якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні.



Якщо $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 4$.

4. Чим більший кут, тим кут, який суміжний з ним, менший і навпаки.



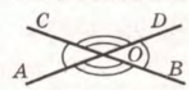
Якщо $\angle 1 < \angle 2$, то $\angle 4 > \angle 3$.

5. Бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут.

6. Якщо суміжні кути рівні, то вони прямі.

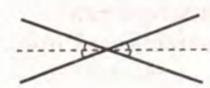
Властивості вертикальних кутів

1. Вертикальні кути рівні.



$\angle AOC = \angle BOD$,
$\angle COD = \angle AOB$.

2. Бісектриси вертикальних кутів.

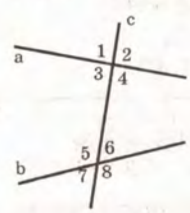


Кут між прямими

Кут між двома прямими, які перетинаються, — не більший із вертикальних кутів, що утворюються при перетині.

Кут між двома прямими площини, які не перетинаються, дорівнює 0°.

Кути при перетині двох прямих січною



При перетині двох прямих третьою прямою (січною) утворюютьcя пари кутів:

$\angle 3$ і $\angle 6$, $\angle 5$ і $\angle 4$ — внутрішньо різносторонні;
$\angle 3$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 6$ — внутрішньо односторонні;
$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$ — відповідні;
$\angle 1$ і $\angle 8$, $\angle 2$ і $\angle 7$ — зовнішньо різносторонні;
$\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 2$ і $\angle 8$ — зовнішньо односторонні.